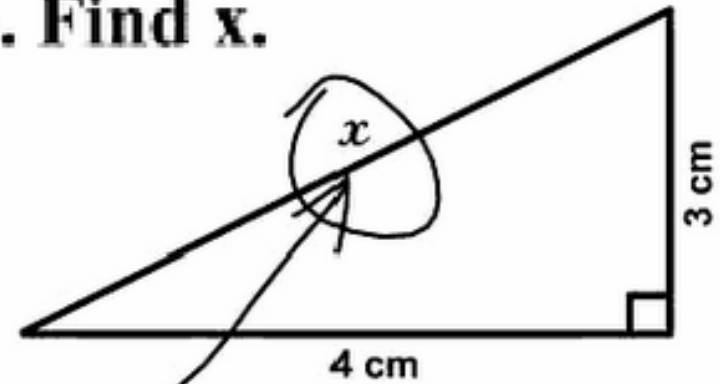


3. Find x .



Here it is

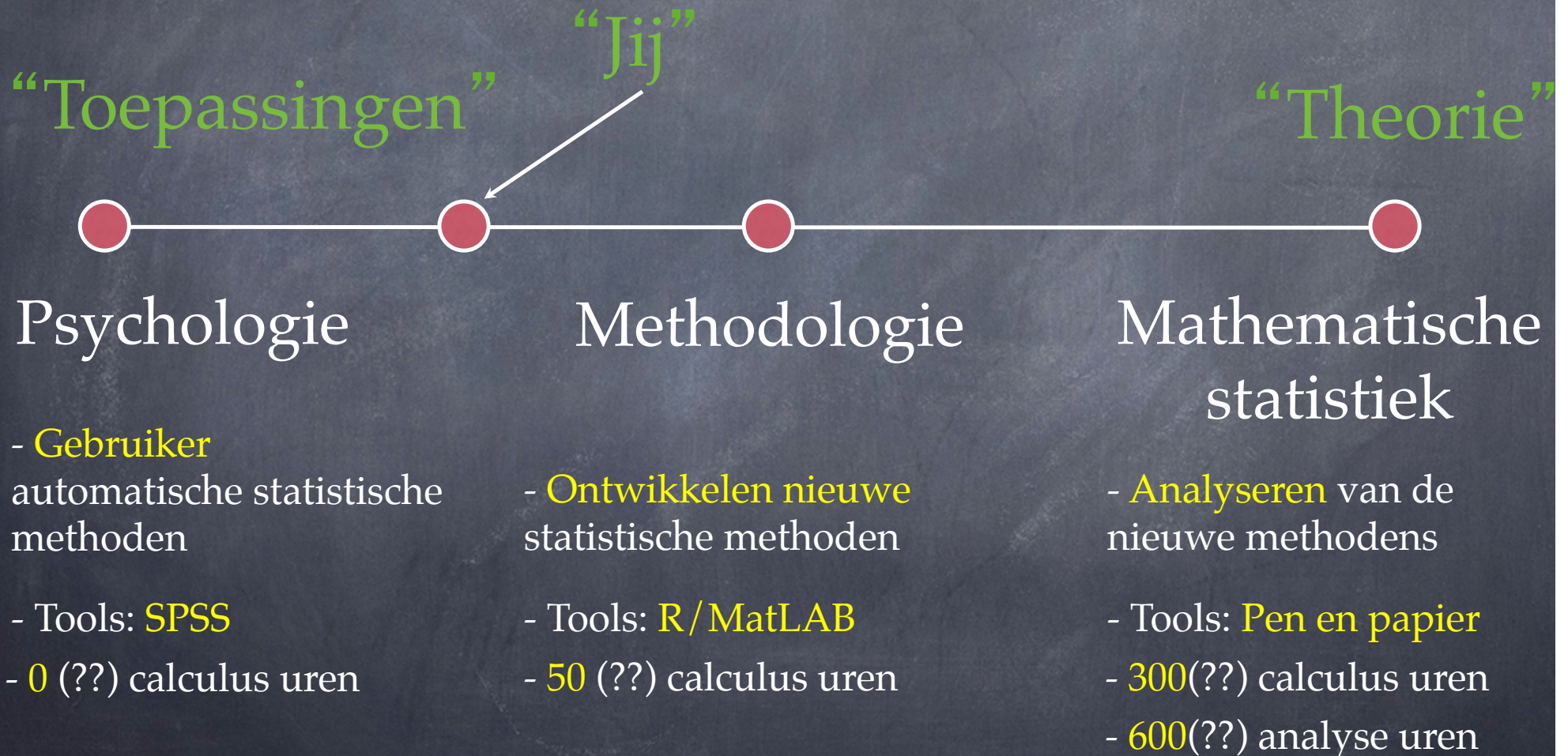
Wiskunde Module

Basisprogramma Psychologische Methodenleer
Alexander Ly (en Raoul Grasman)

Inhoudsopgave

- Wiskunde en psychologie
- Doelstelling van de module
- Opzet van de module
- Algebra: reken regels
- Algebra: reken regels voor exponenten
- Volgende les: Functies

Psychologie, methodologie, mathematische statistiek



Inhoudsopgave

- Wiskunde en psychologie
- Doelstelling van de module
- Opzet van de module
- Algebra: reken regels
- Algebra: reken regels voor exponenten
- Volgende les: Functies

Doelstelling van de module

Jullie inzicht geven over:

- Algebraïsche manipulatie

Inzicht geven over **manipuleren** van een aantal standaard functies

- “Inverteren”
- Differentiëren
 - Optimaliseren
- Integreren (Concept)
- Matrix rekenen (Introductie)

Inhoudsopgave

- Wiskunde en psychologie
- Doelstelling van de module
- **Opzet van de module**
- Algebra: reken regels
- Algebra: reken regels voor exponenten
- Volgende les: Functies

Opzet van de module:

Vijf lessen:

Hoorcolleges (9.00 – 11.00):

- Voorbereiding: Lees stof door
- Diagnostische testjes

Werkcolleges (11.00 – 13.00):

- Voorbereiding: Maak twee opgaven van elk paragraaf
- Opdrachten op het bord

Hoorcollege vs werkcollege

Wiskunde combineert inzicht en regels:

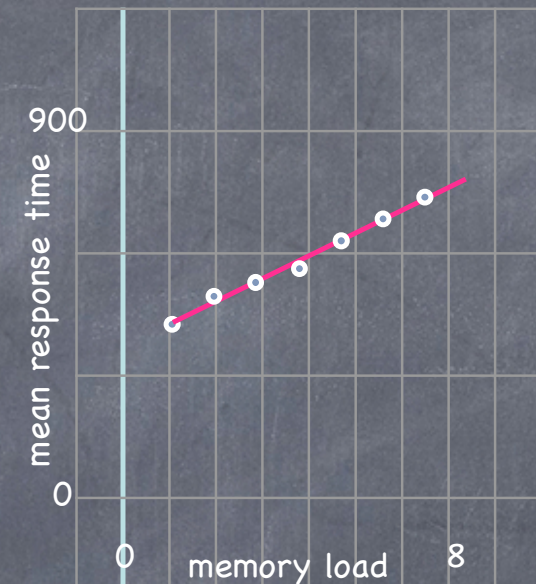
- Regels veralgemeniseren bepaalde **ideeen**
(Hoorcolleges + diagnostische testjes)
- Je leert de regels door deze te **gebruiken**
(Werkcollege)
- Uiteindelijk gebruik je wiskunde als een taal om je intuïtie te vertalen in een **model**.

Functies zijn fundamenteel voor het beschrijven van relaties in empirische data

Sternberg ('64):

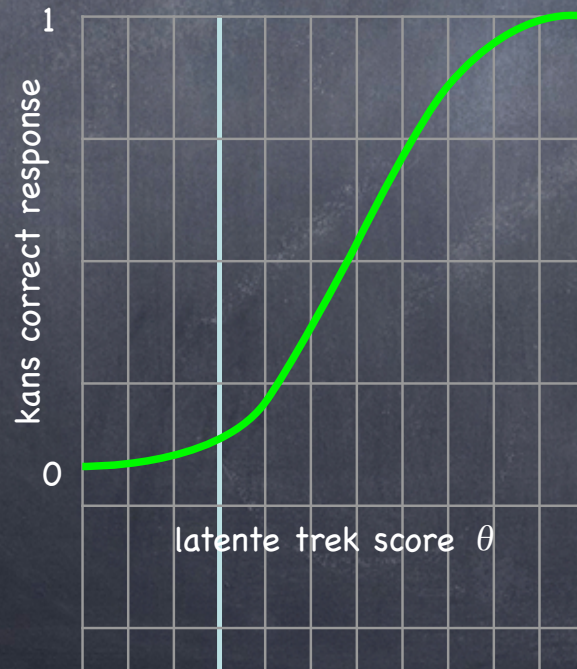
$$RT \approx 38 \cdot N + 397$$

N is # items in geheugen



IRT

$$\frac{e^{a(\theta-b)}}{1 + e^{a(\theta-b)}}$$

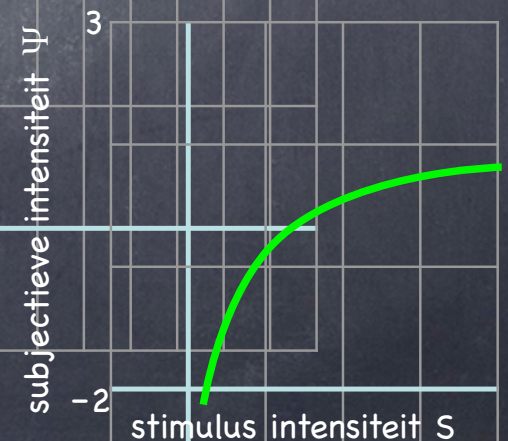


Wet van Weber

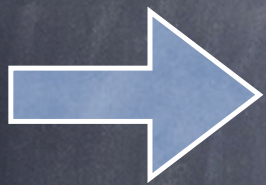
$$\Delta\Psi = k \frac{\Delta S}{S}$$

\Leftrightarrow

$$\Psi = k \cdot \log(S)$$



We behandelen voornamelijk algebra en differentiëren van functies

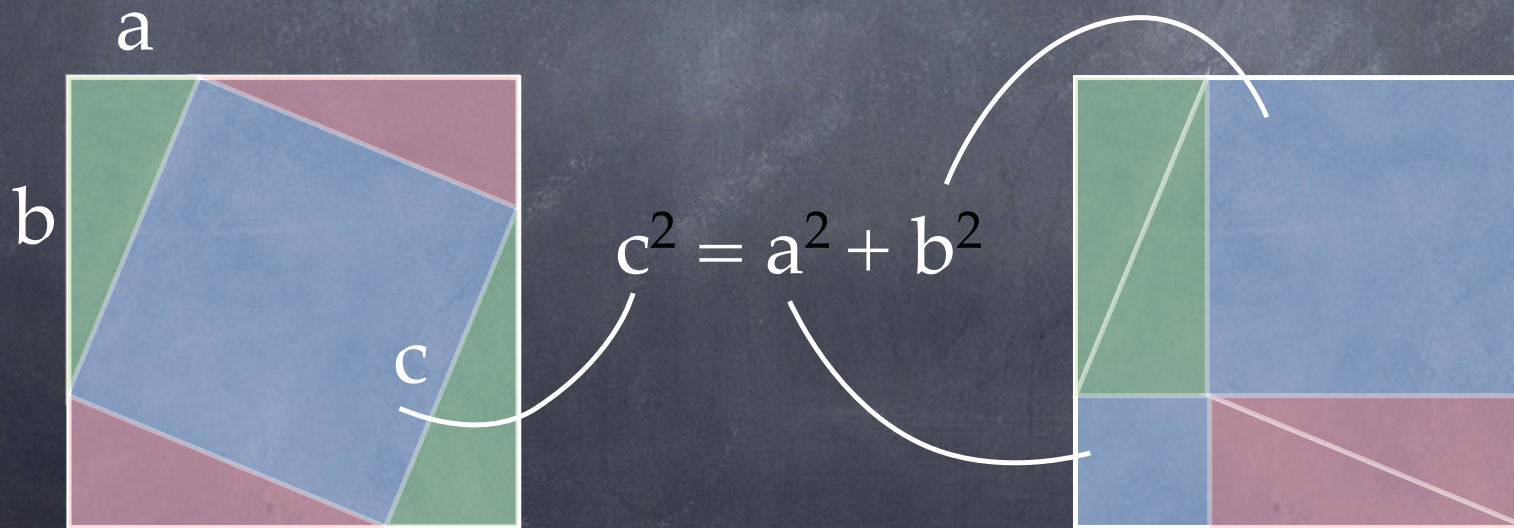
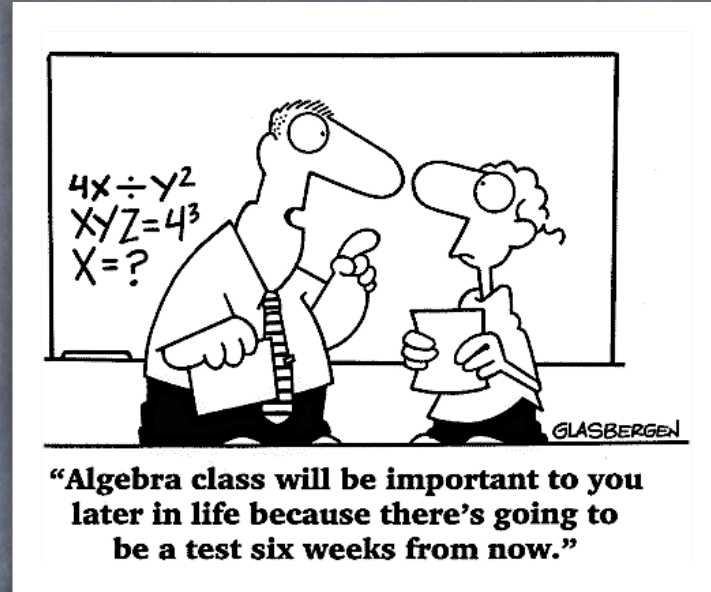


vr	algebra, incl. logaritmen
ma	functies, 1e & 2e orde polynomen
wo	afgeleiden, differentiëren
vr	differentiëren en integreren
ma	matrix algebra

Inhoudsopgave

- Wiskunde en psychologie
- Doelstelling van de module
- Opzet van de module
- Algebra: reken regels
 - Optellen
 - Vermenigvuldigen
- Logarithmen: algebra voor exponenten
- Volgende les: Functies

Algebra



Algebra: Programma

- Wat?
- Waarom?
- Optellen en vermenigvuldigen
 - Gehele getallen
 - Breuken
 - Exponenten
 - Logarithmen

Wiskunde en muziek



Optellen

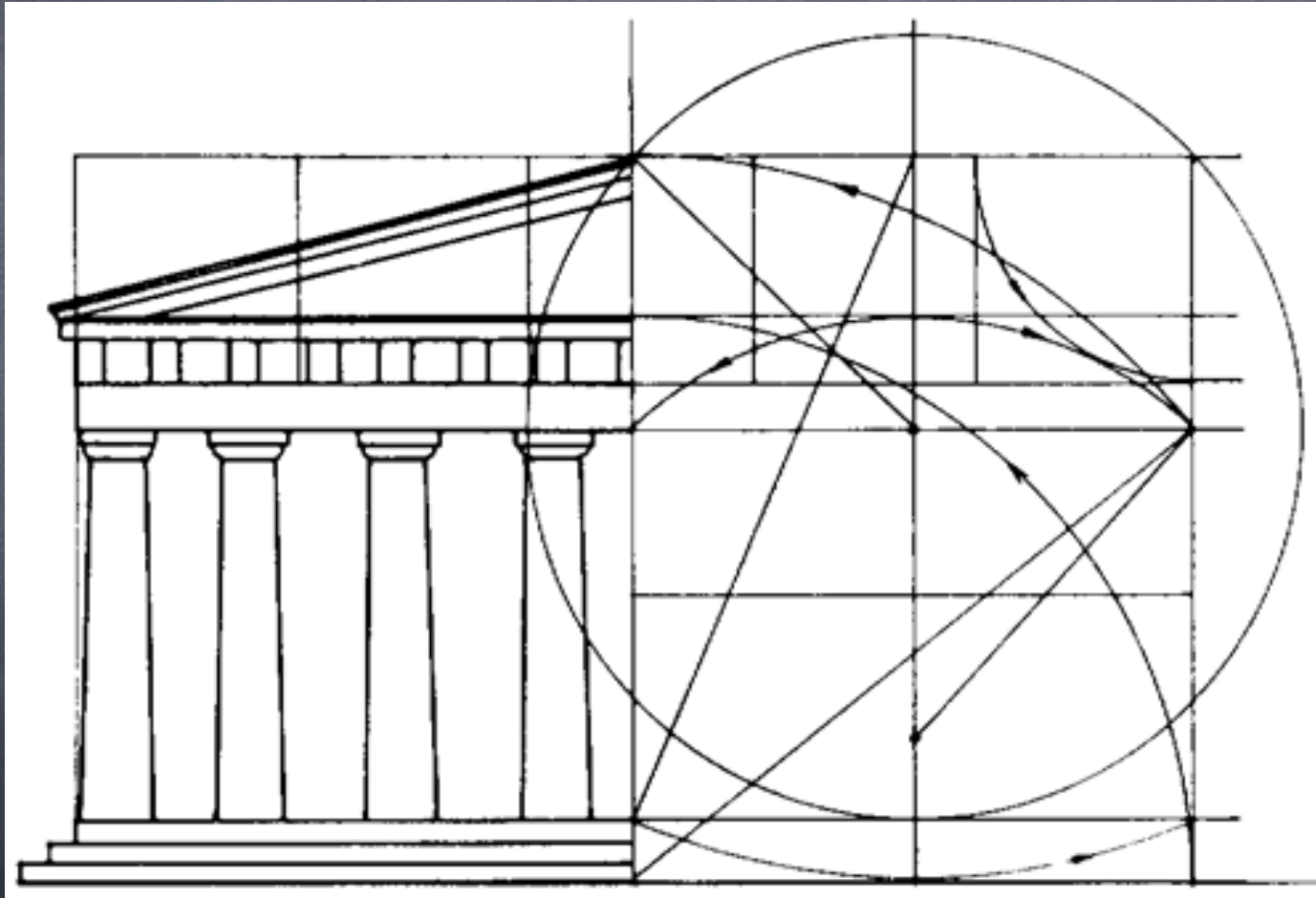
- Associatief:
 - $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Identiteit: Er is een nul element
 - $a + 0 = a$ en $0 + a = a$
- Inverse: Voor elke a is er een b
 - $a + b = 0$ en $b + a = 0$
 - En we noemen $b = -a$
- Commutatief
 - $a + b = b + a$



Optellen

- Associatief:
 - $(3 + 7) + 5 = 3 + (7 + 5)$
- Identiteit: Er is een nul element
 - $4 + 0 = 4$ en $0 + 4 = 4$
- Inverse: Voor elke a is er een b
 - $2 + b = 0$ en $b + 2 = 0$
 - En we noemen $b = -2$
- Commutatief
 - $3 + 5 = 5 + 3$

Wiskunde zonder algebra: Griekse wiskunde



<http://goo.gl/yMFXX1>

Optellen is volgens de Grieken
pijltjes aan elkaar plakken



Getallenlijn: Lijn

R

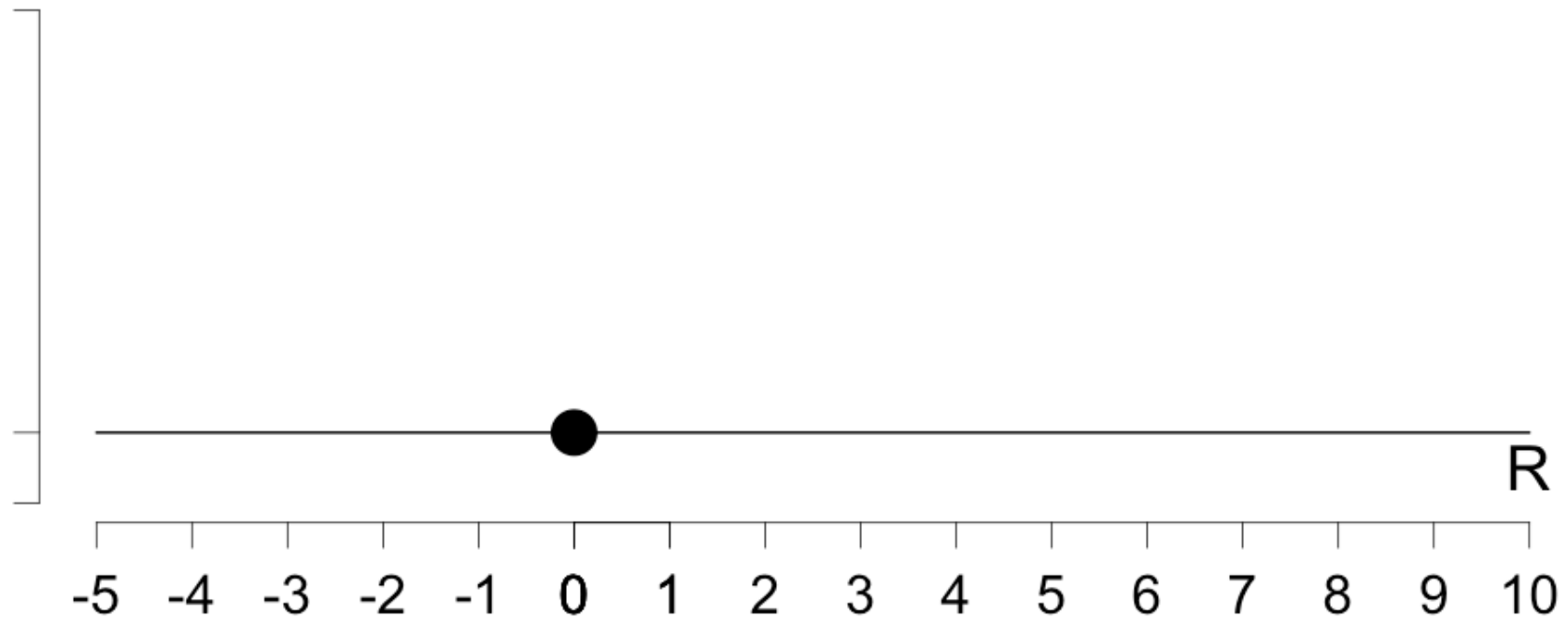
Getallenlijn: Nul punt



Getallenlijn: Eenheid



Getallenlijn: Palet

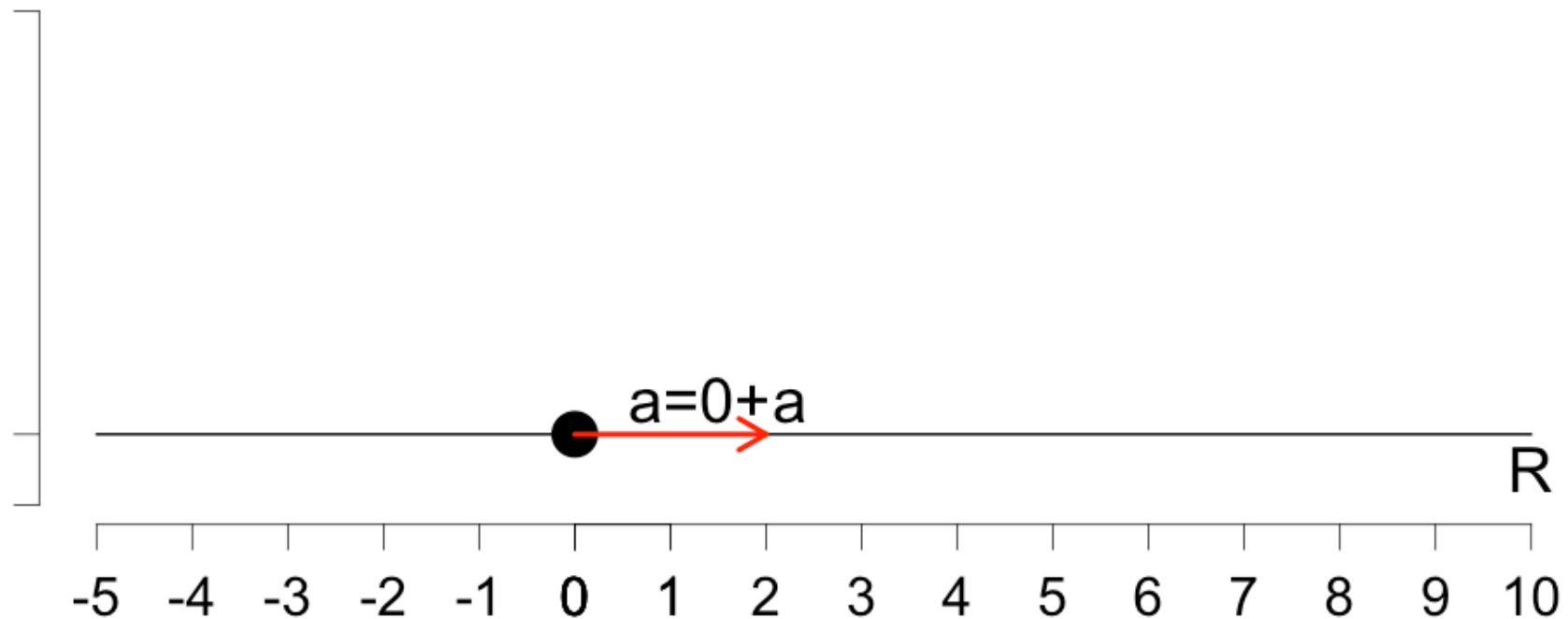


Optellen

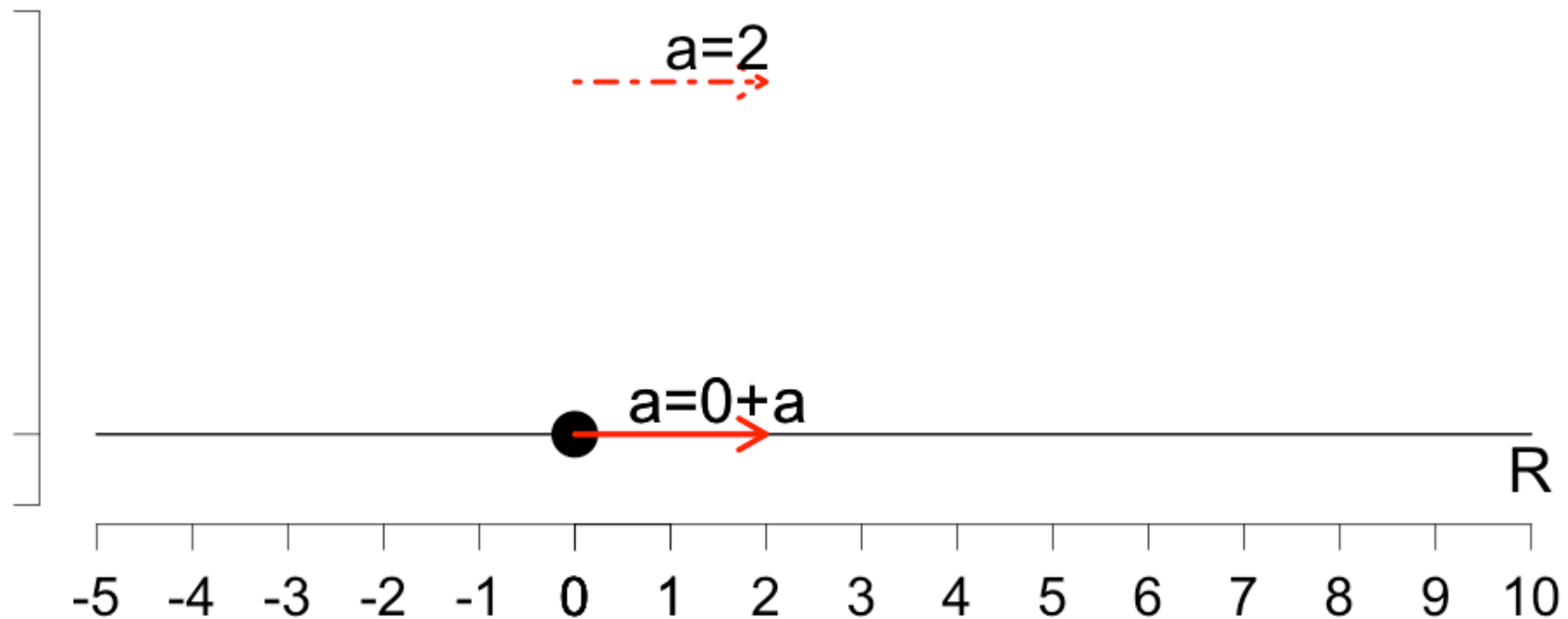
- Associatief:
 - $(a + b) + c = a + (b + c)$
- **Identiteit: Er is een nul element**
 - $a + 0 = a$ en $0 + a = a$
- Inverse: Voor elke a is er een b
 - $a + b = 0$ en $b + a = 0$
 - En we noemen $b = -a$
- Commutatief
 - $a + b = b + a$



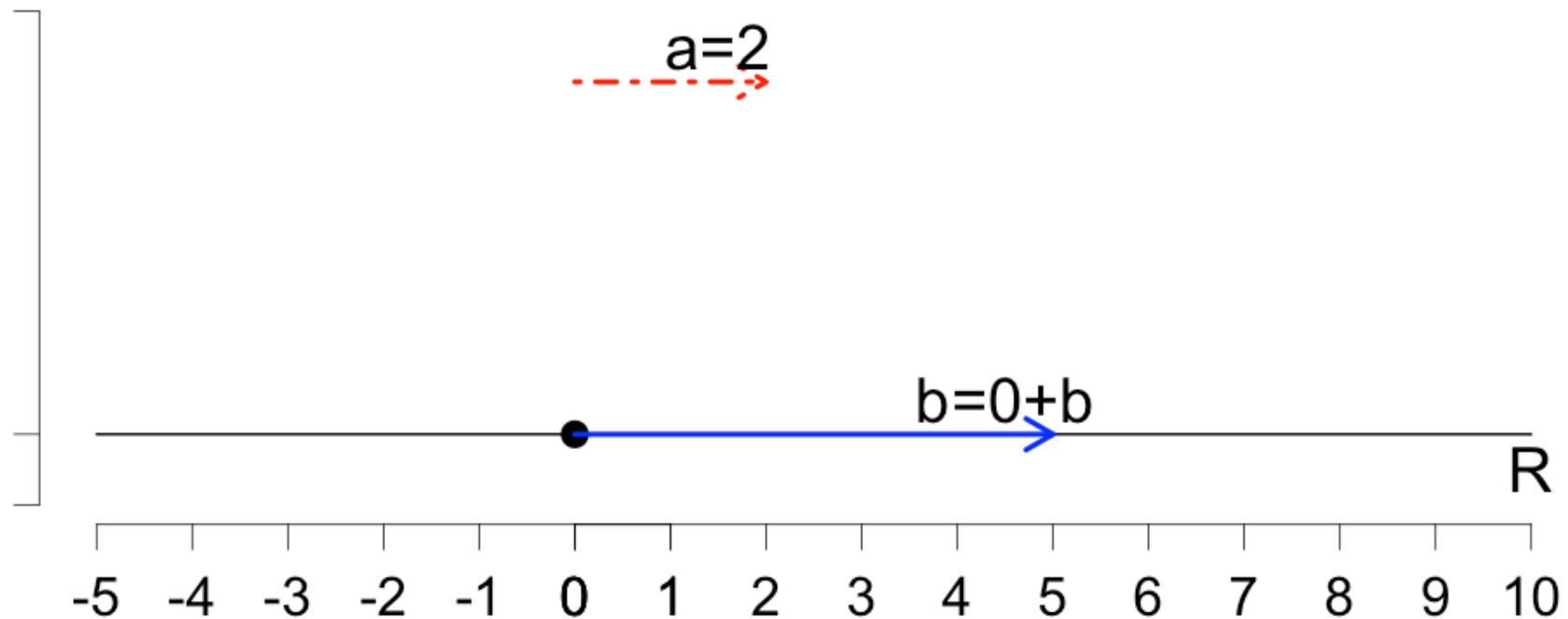
Getallenlijn: Getal $a=0+a$



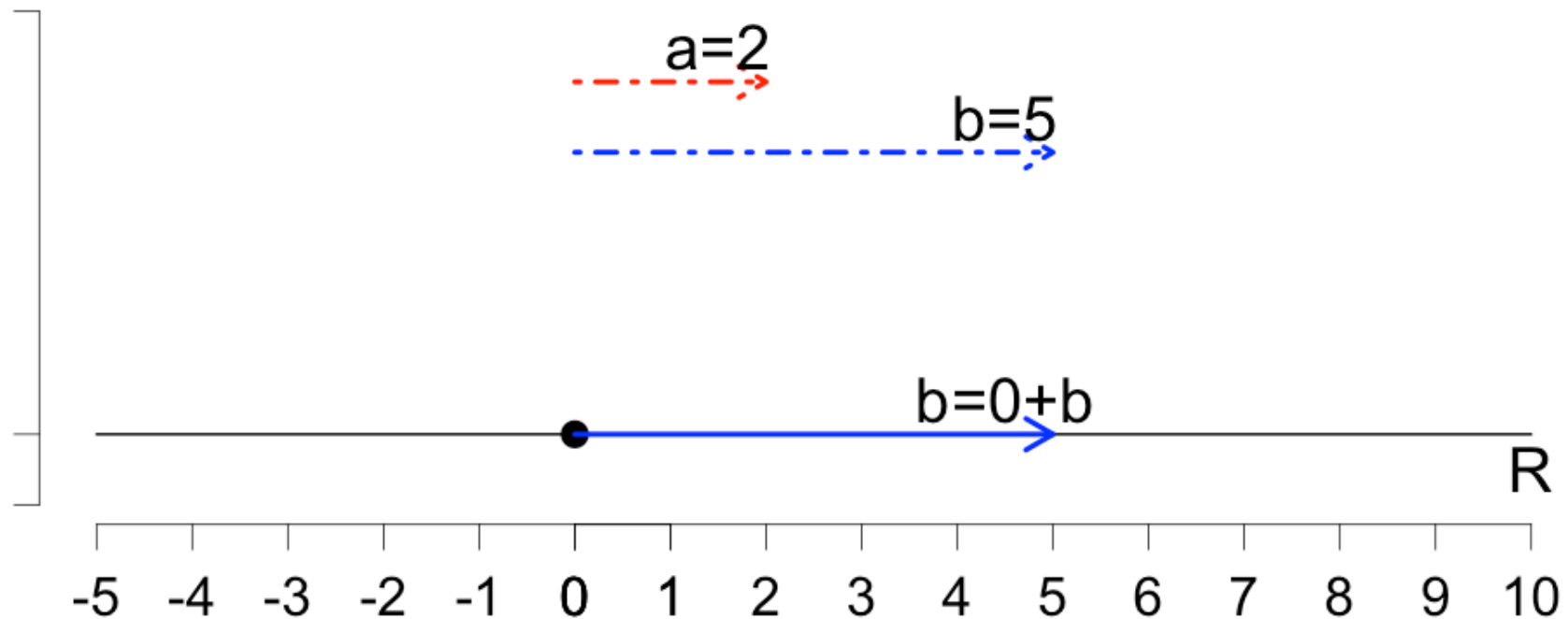
Getallenlijn: $a=2$ “rechts-georiënteerd”



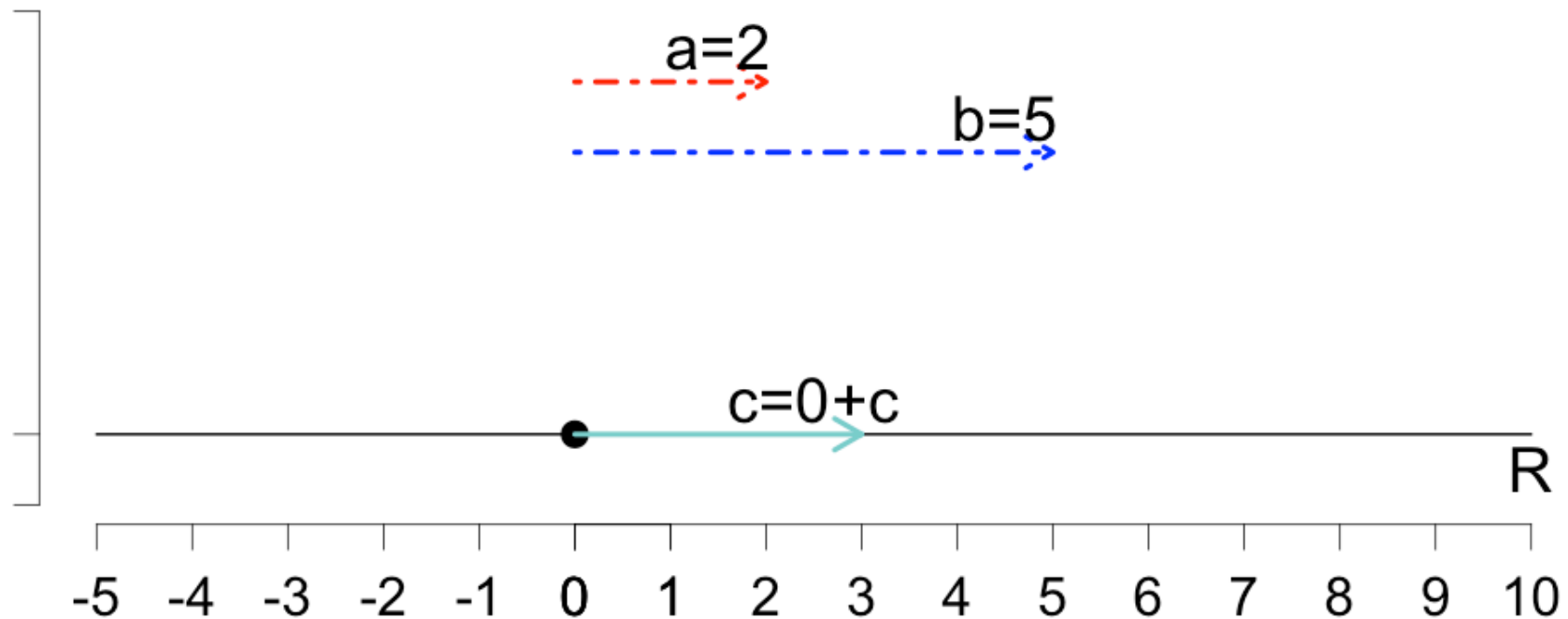
Getallenlijn: Getal $b=0+b$



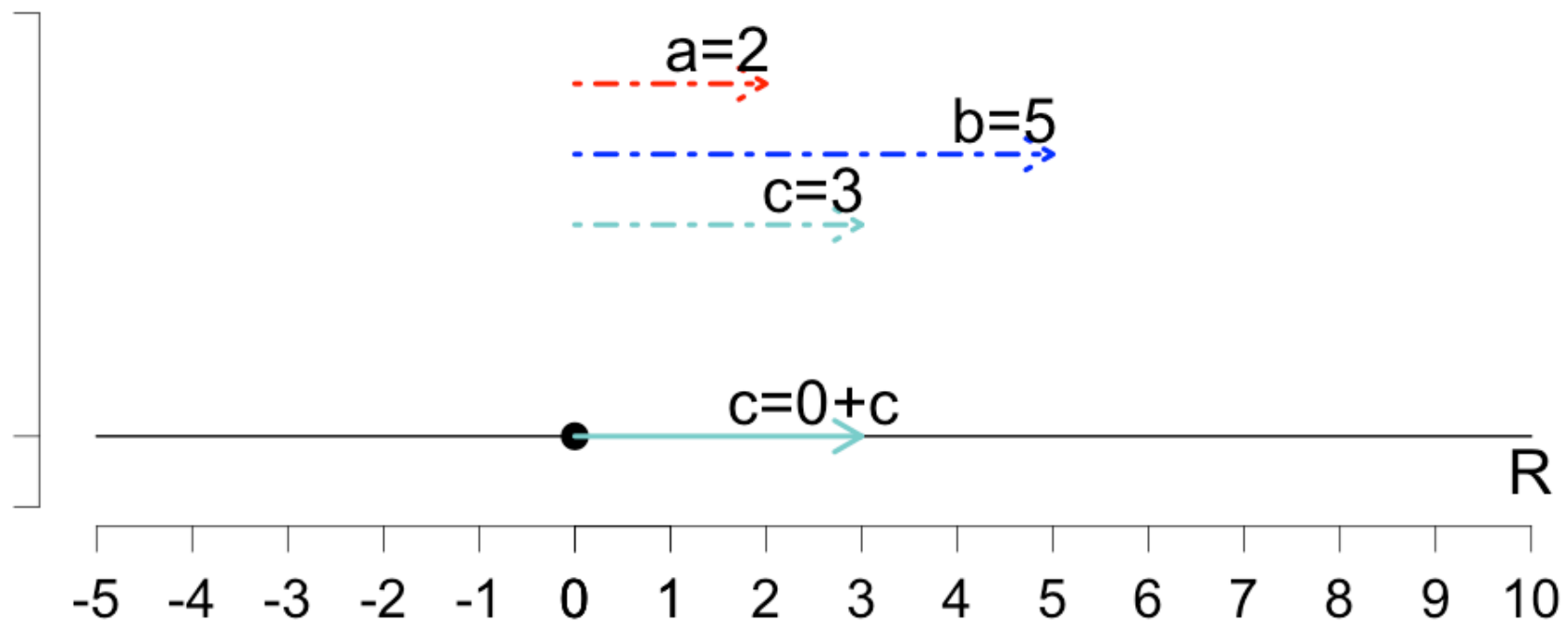
Getallenlijn: $b=5$



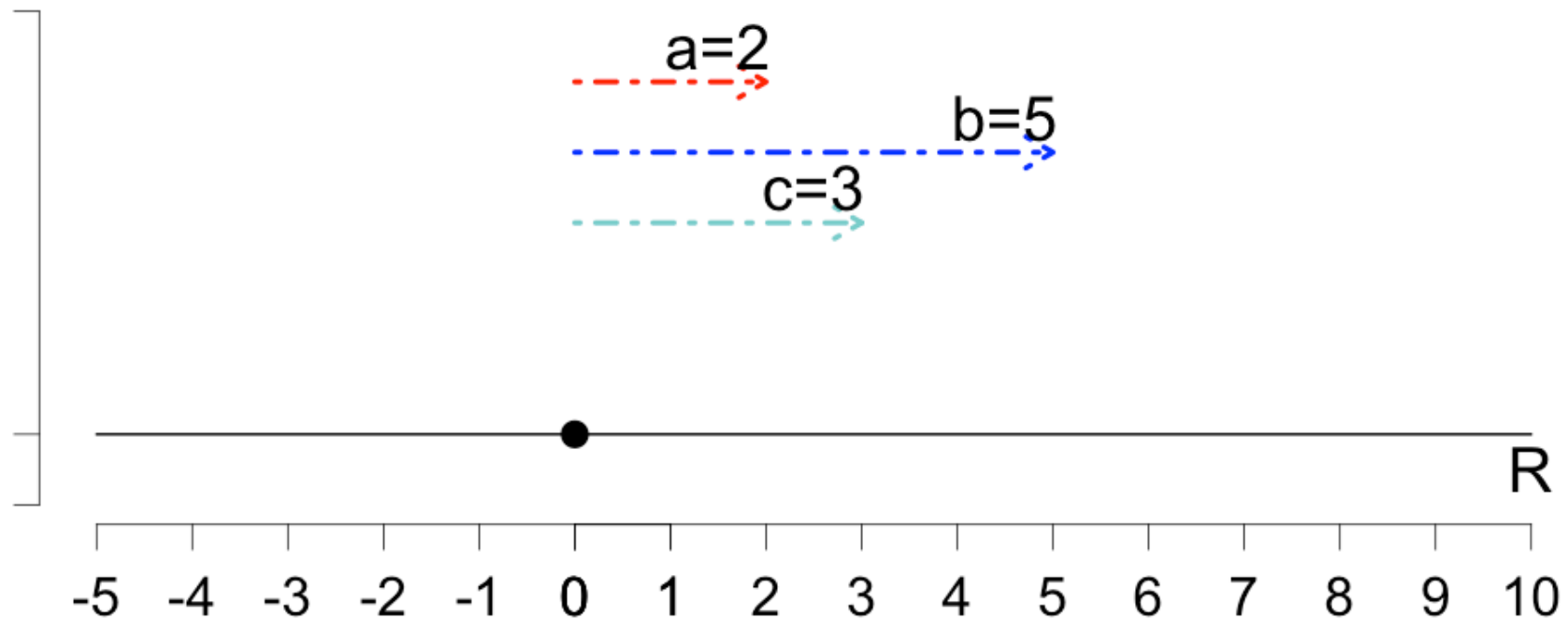
Getallenlijn: Getal $c=0+c$



Getallenlijn: $c=3$



Getallenlijn: a, b, c

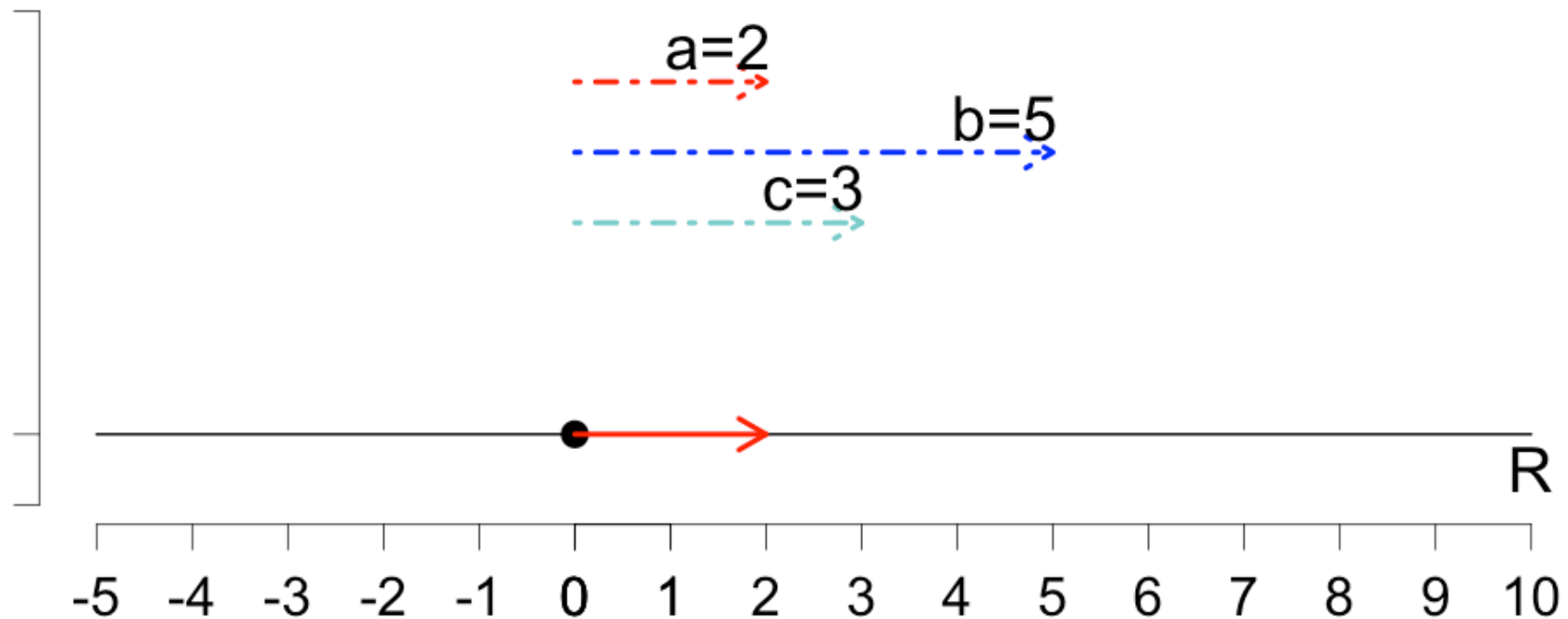


Optellen

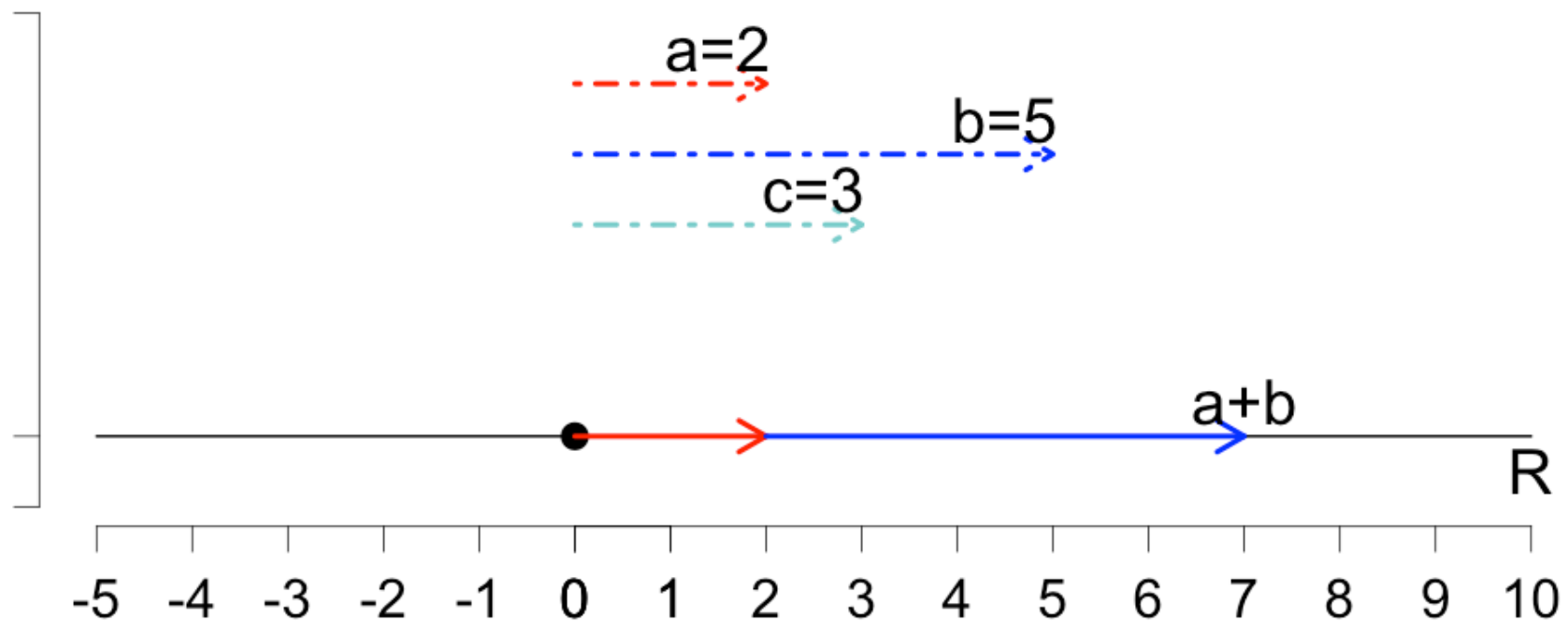
- Associatief:
 - $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Identiteit: Er is een nul element
 - $a + 0 = a$ en $0 + a = a$
- Inverse: Voor elke a is er een b
 - $a + b = 0$ en $b + a = 0$
 - En we noemen $b = -a$
- **Commutatief**
 - $a + b = b + a$



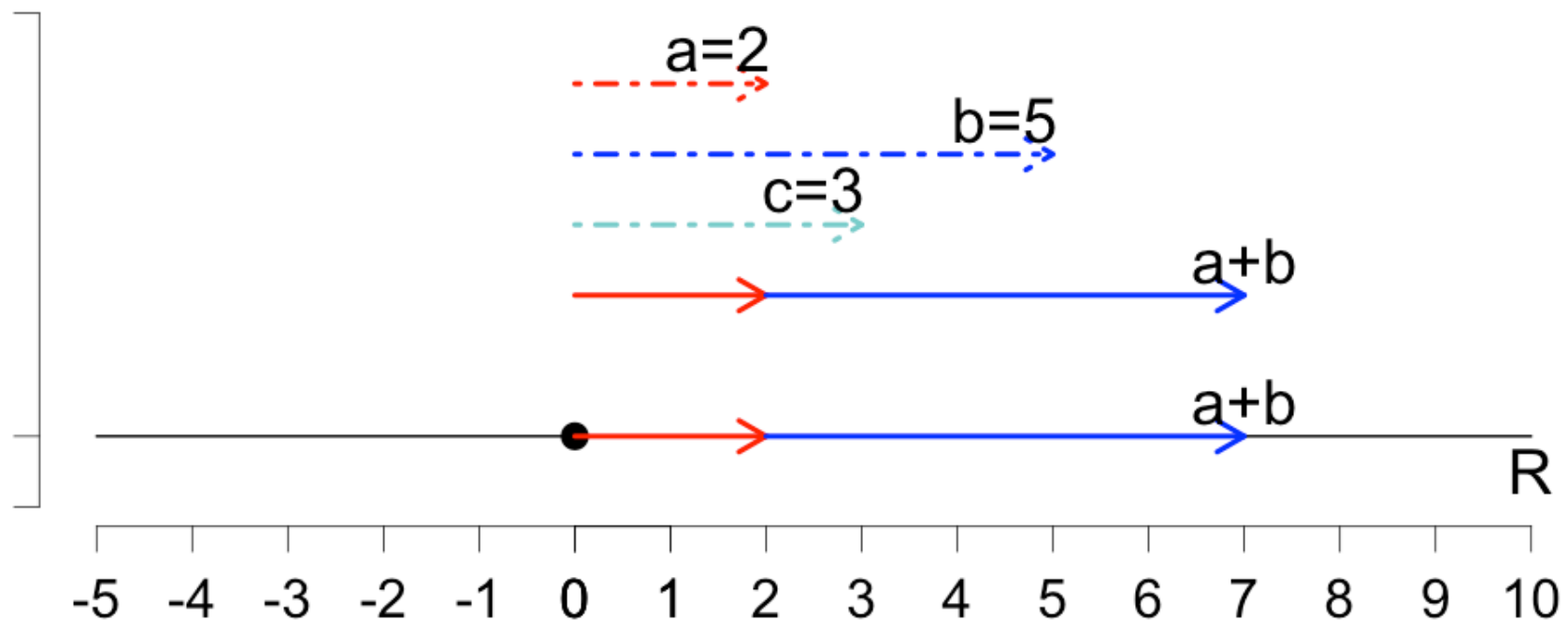
Commutatief: $a=0+a$



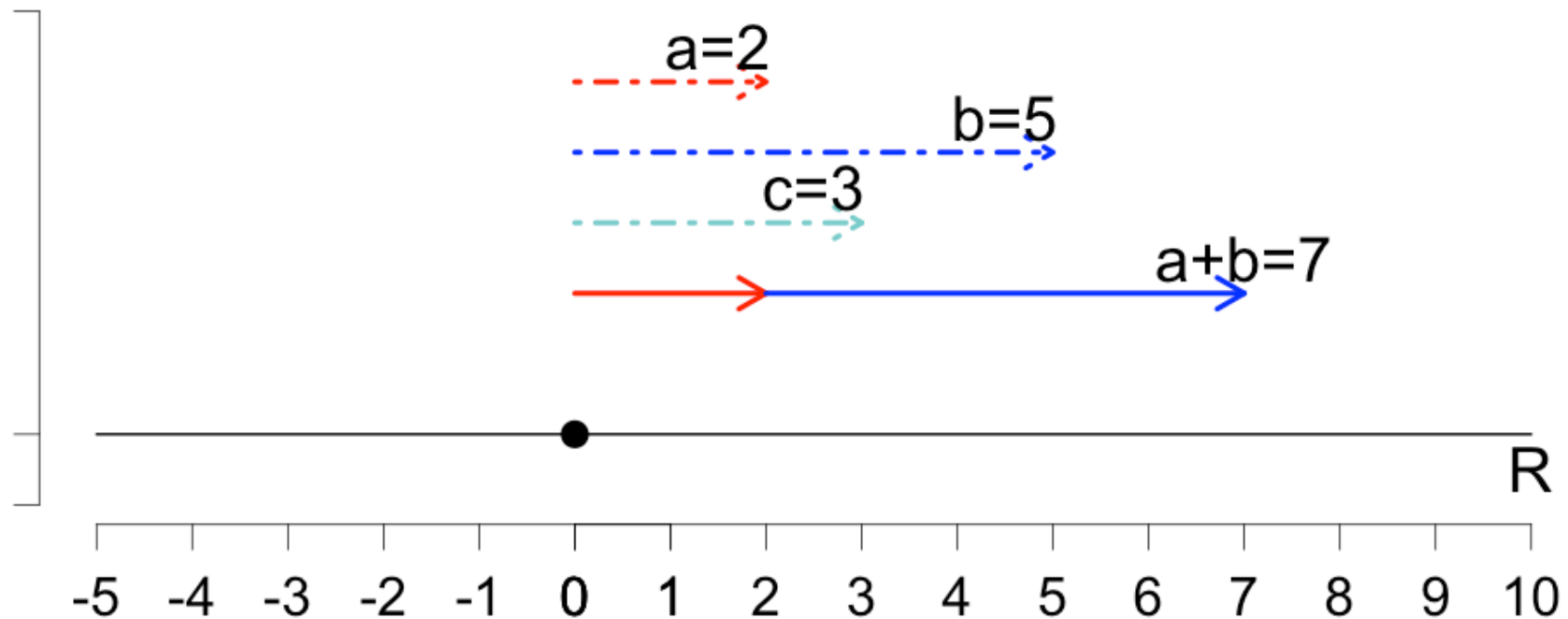
Commutatief: $a+b$



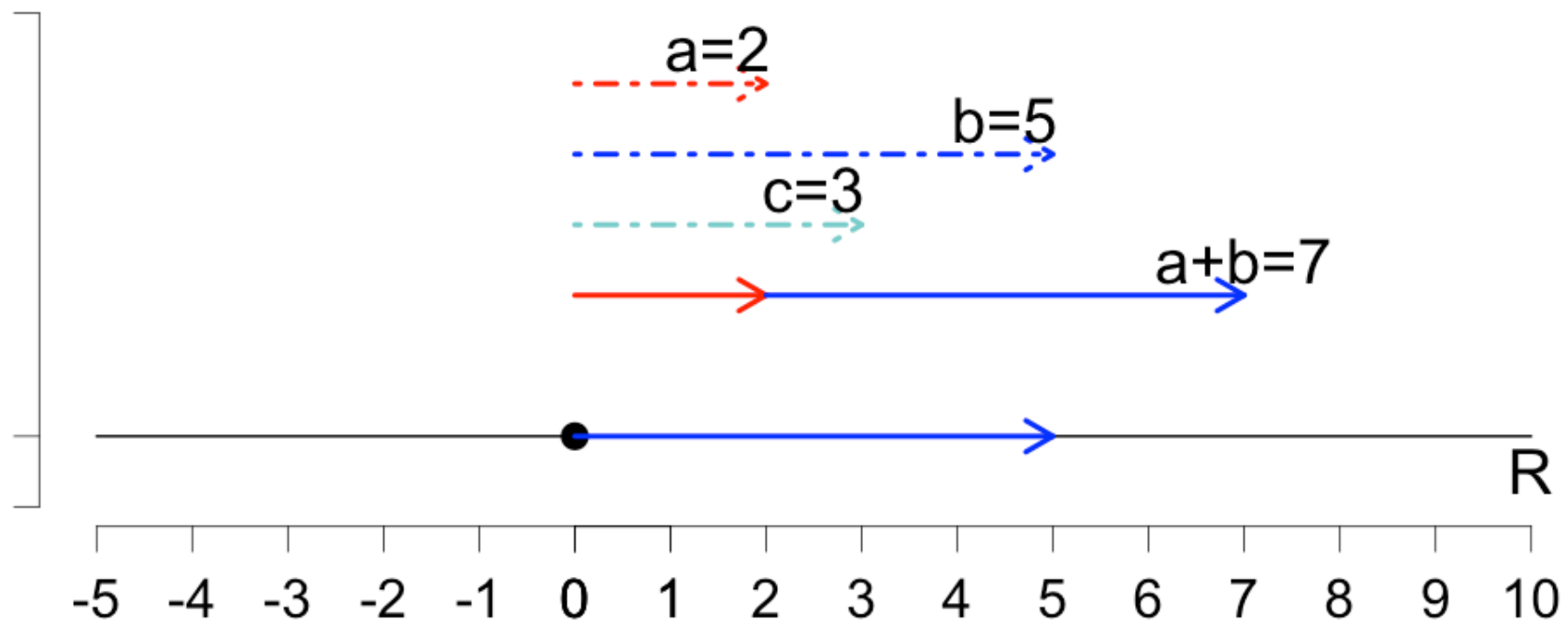
Commutatief: $a+b=7$



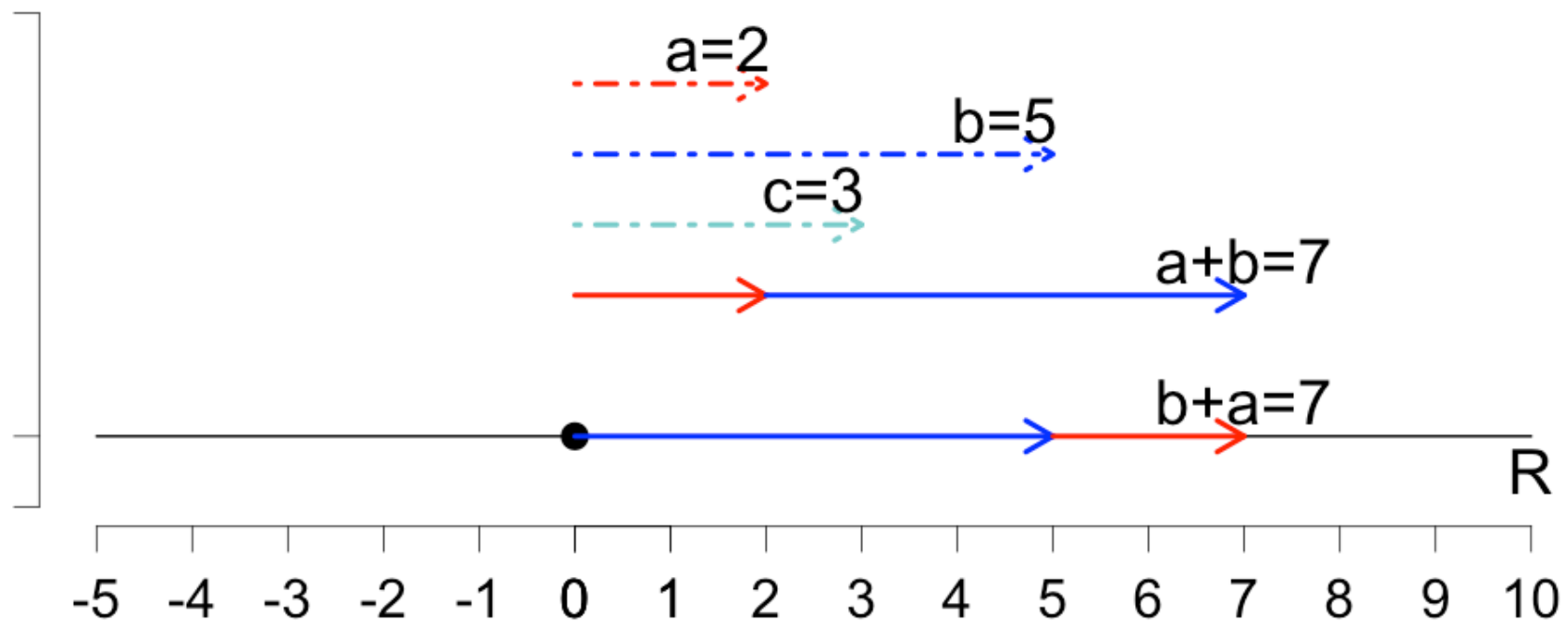
Commutatief:



Commutatief: $b=0+b$



Commutatief: $b+a=7$

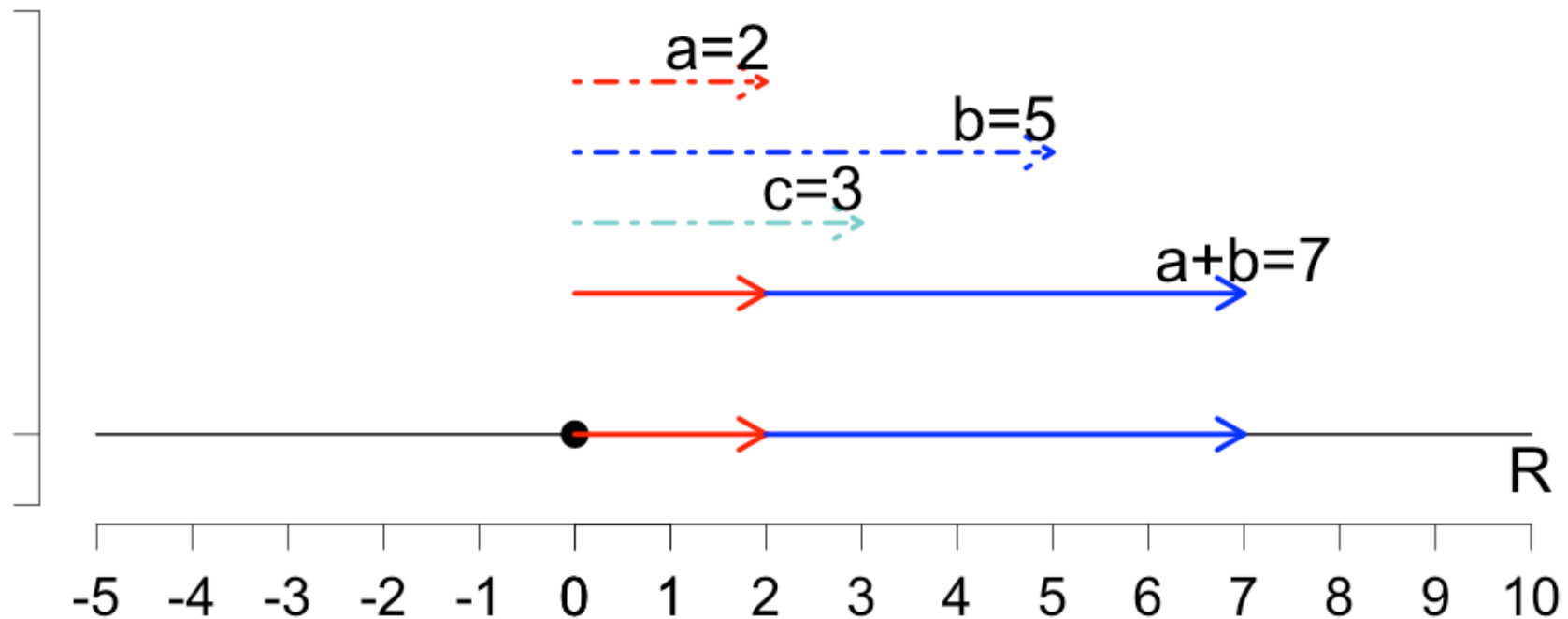


Optellen

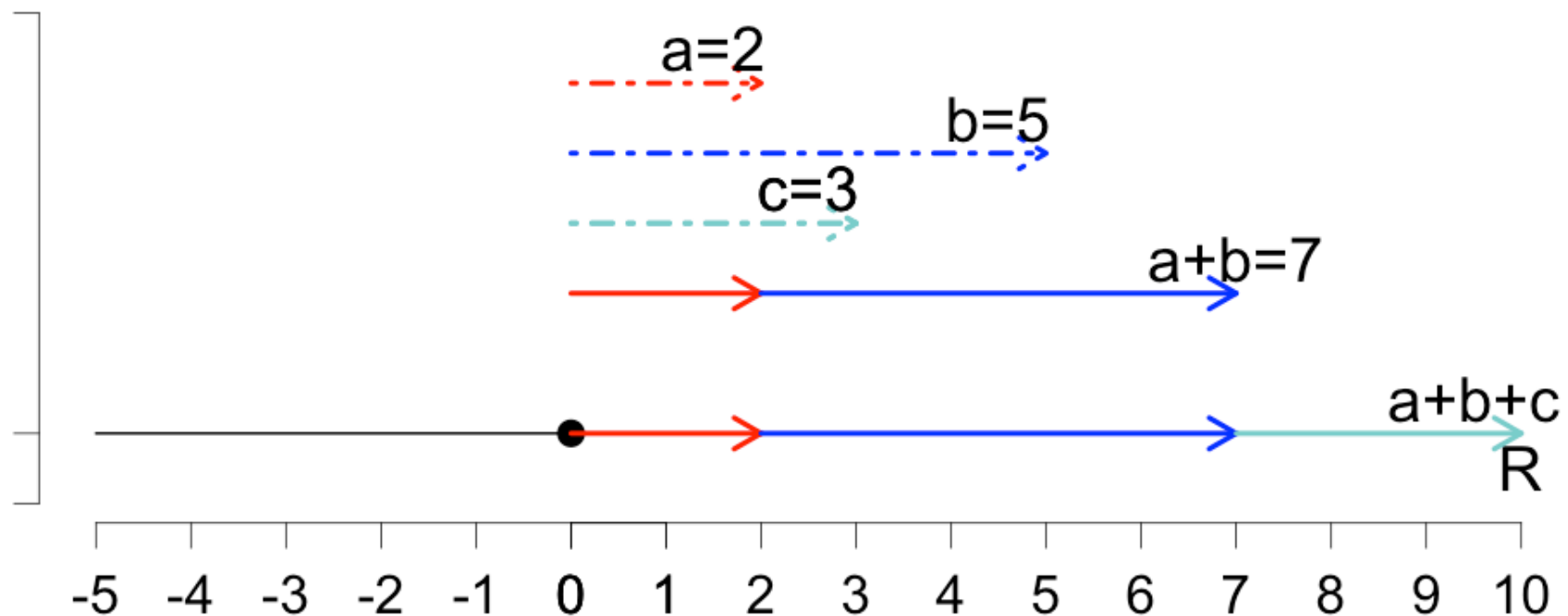
- **Associatief:**
 - $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Identiteit: Er is een nul element
 - $a + 0 = a$ en $0 + a = a$
- Inverse: Voor elke a is er een b
 - $a + b = 0$ en $b + a = 0$
 - En we noemen $b = -a$
- Commutatief
 - $a + b = b + a$



Associatief: $a+b$



Associatief: $(a+b)+c=a+(b+c)$

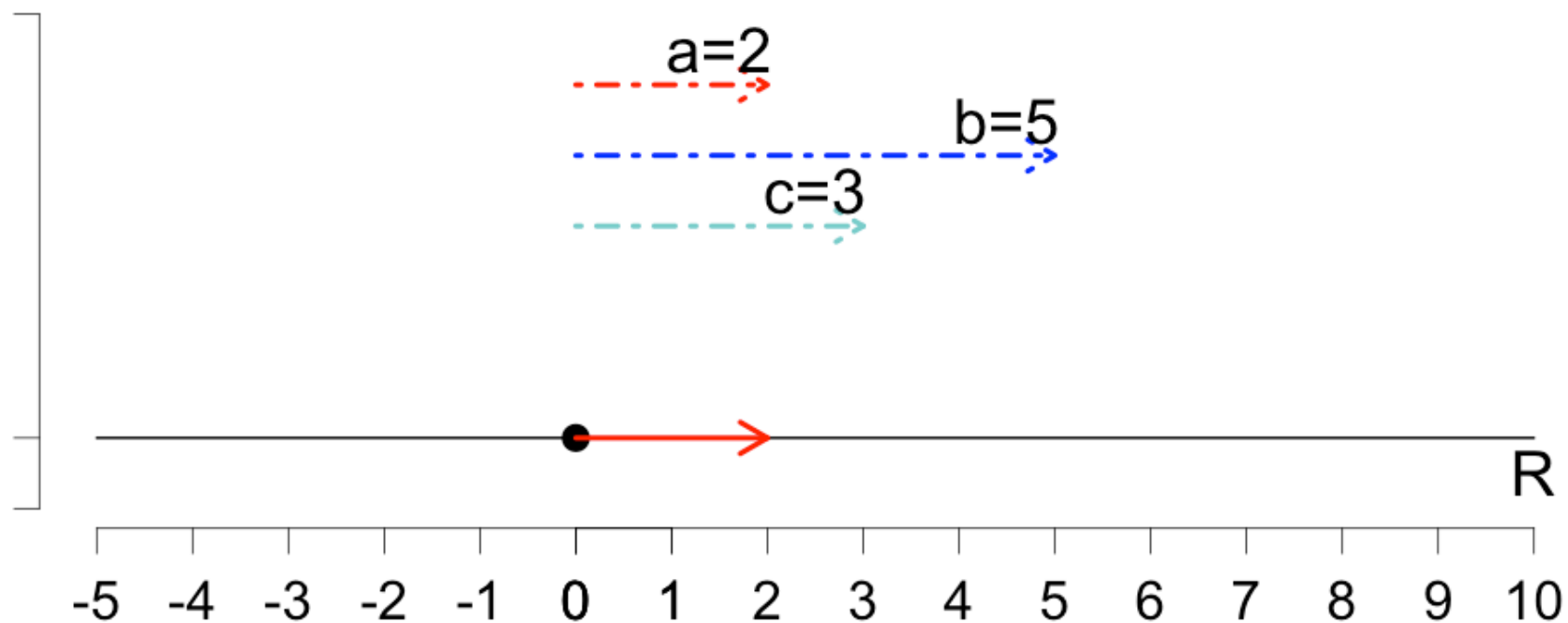


Optellen

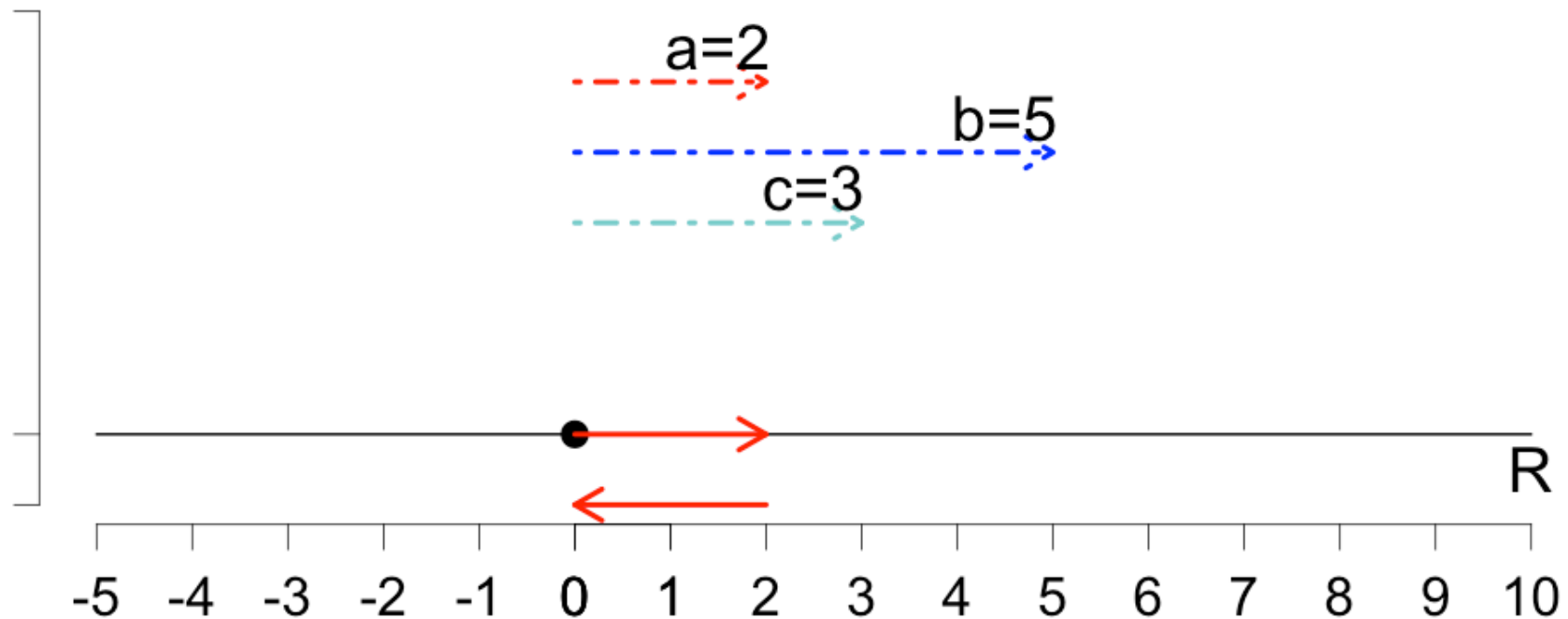
- Associatief:
 - $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Identiteit: Er is een nul element
 - $a + 0 = a$ en $0 + a = a$
- Inverse: Voor elke a is er een b
 - $a + b = 0$ en $b + a = 0$
 - En we noemen $b = -a$
- Commutatief
 - $a + b = b + a$



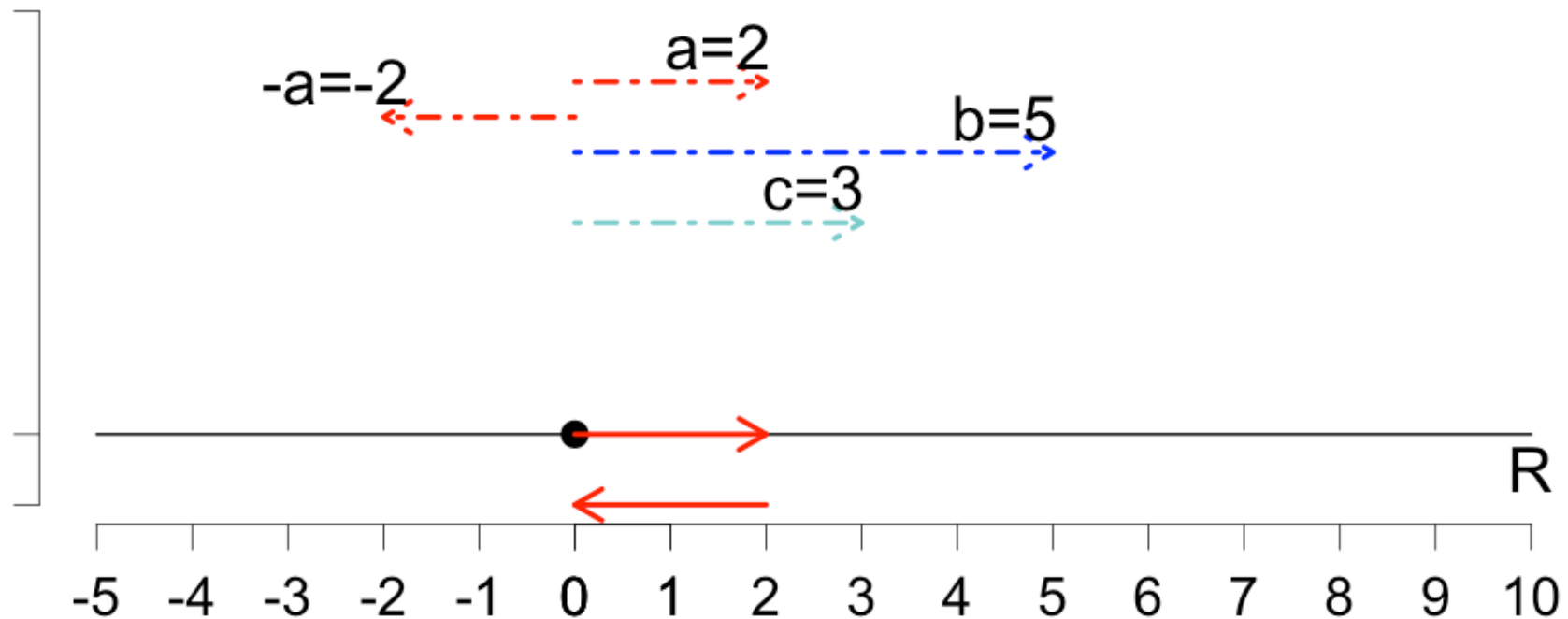
Quiz: $-a$?



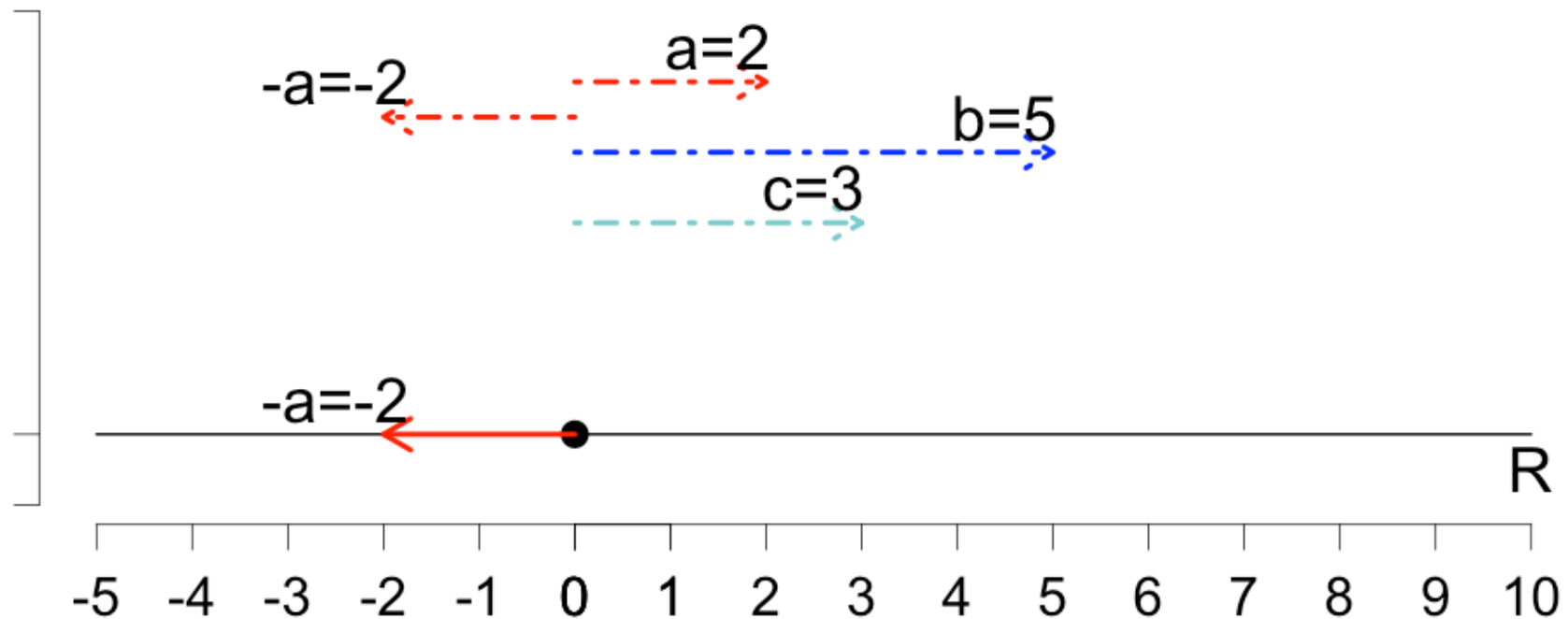
Aftrekken: $-a =$ "links-georiënteerd" a



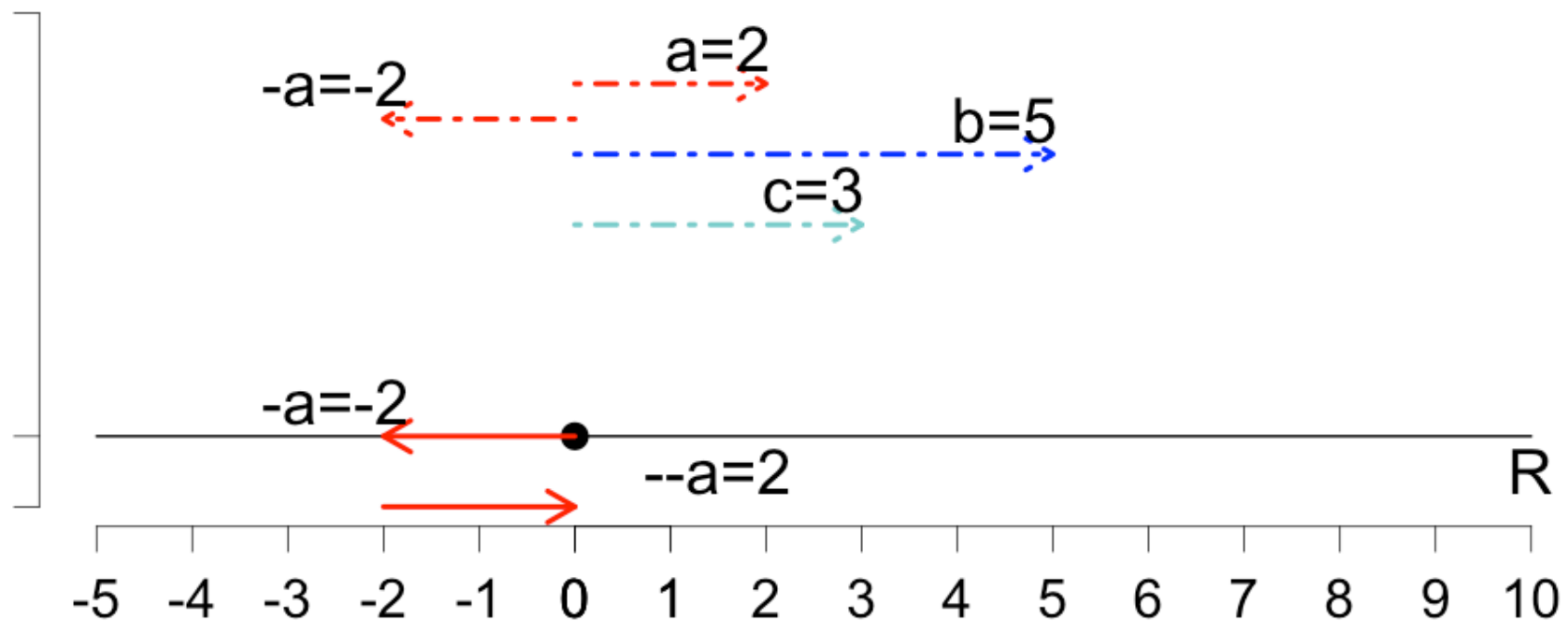
Aftrekken: $-a$, a , b , c



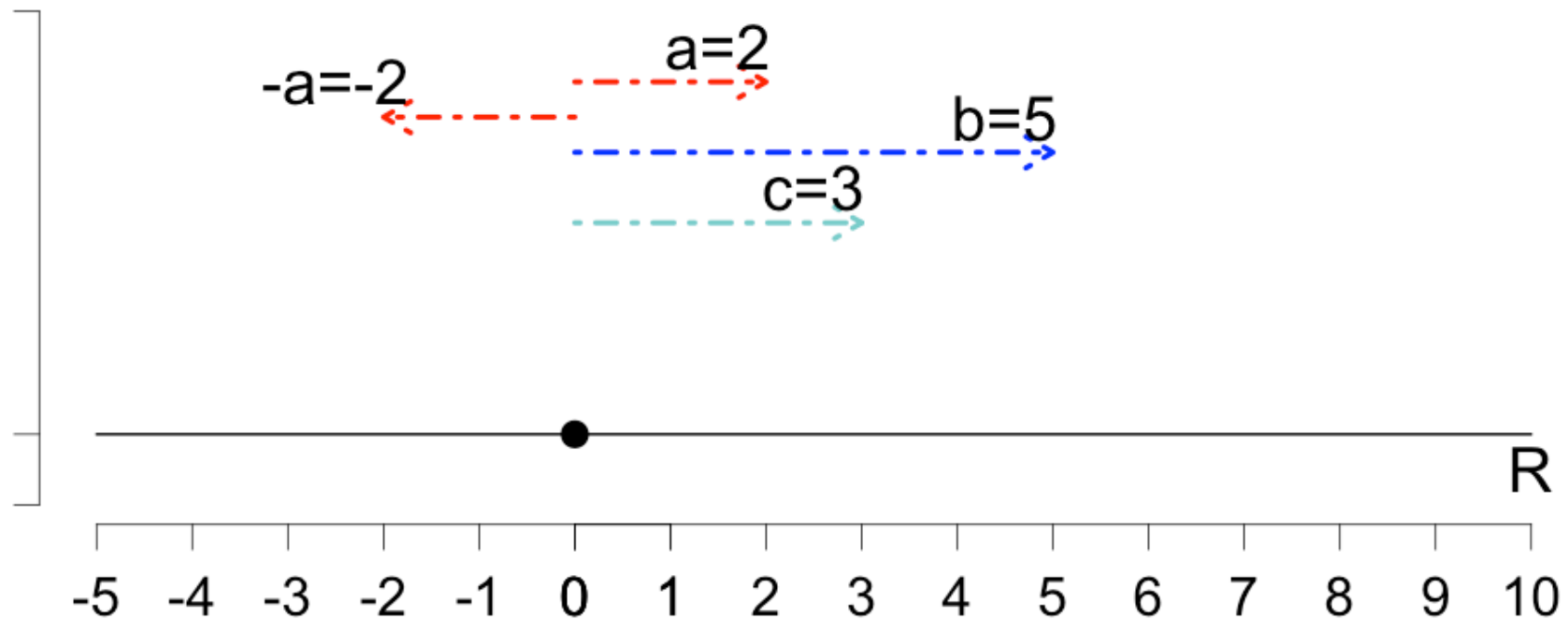
Quiz: $-(-a)$???



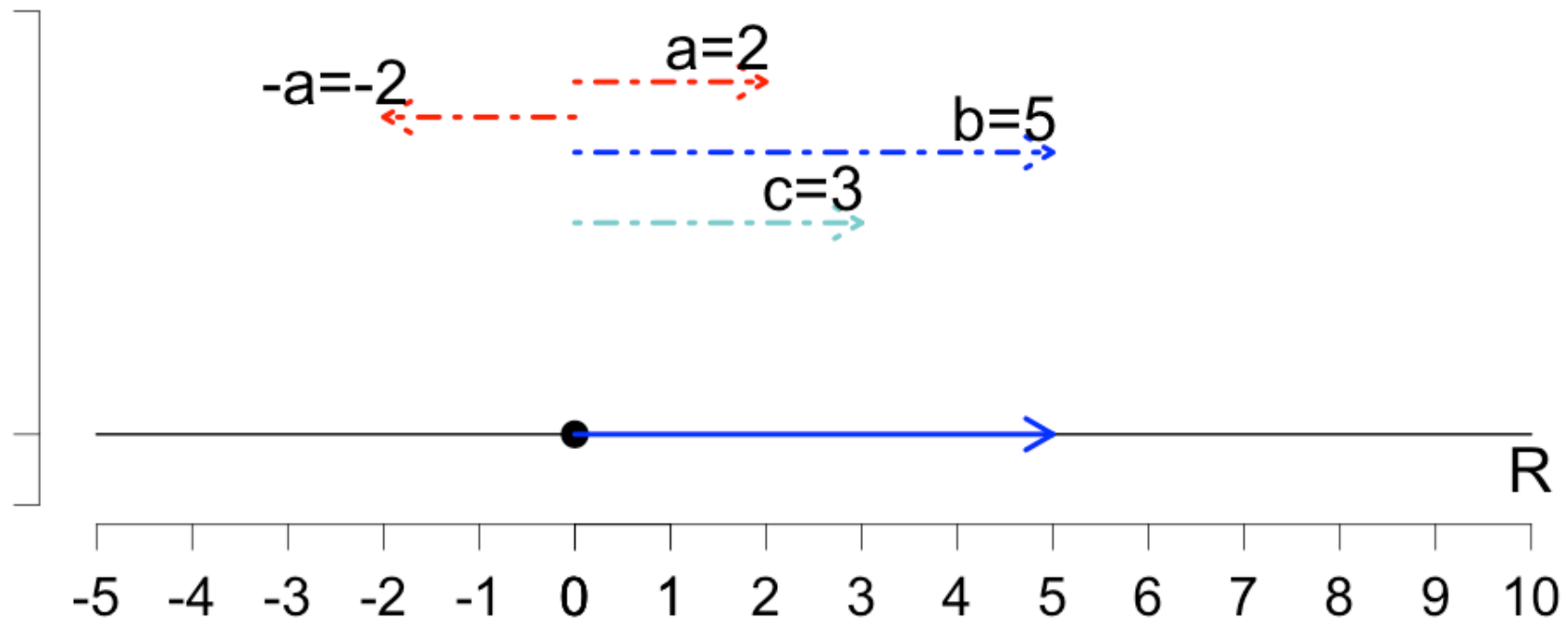
Aftrekken: $-(-a)=a$



Aftrekken: $b-a$



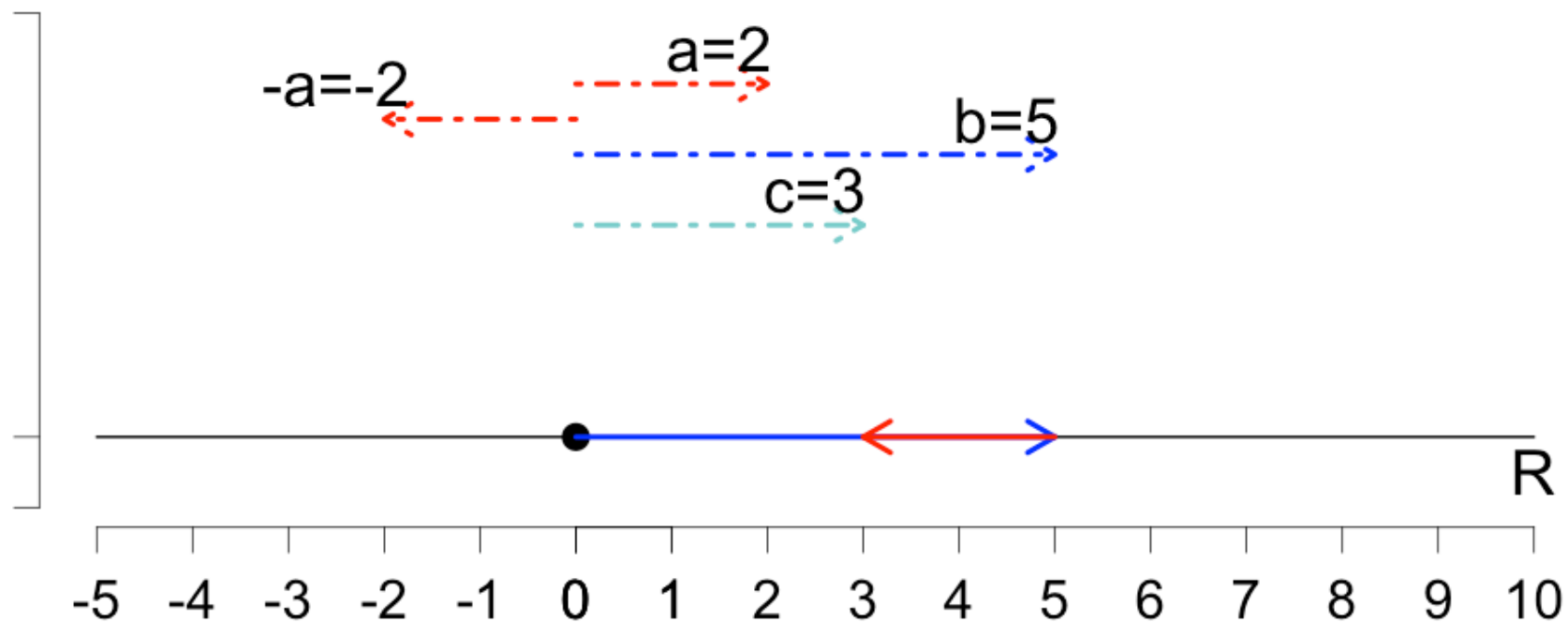
Aftrekken: $b-a$



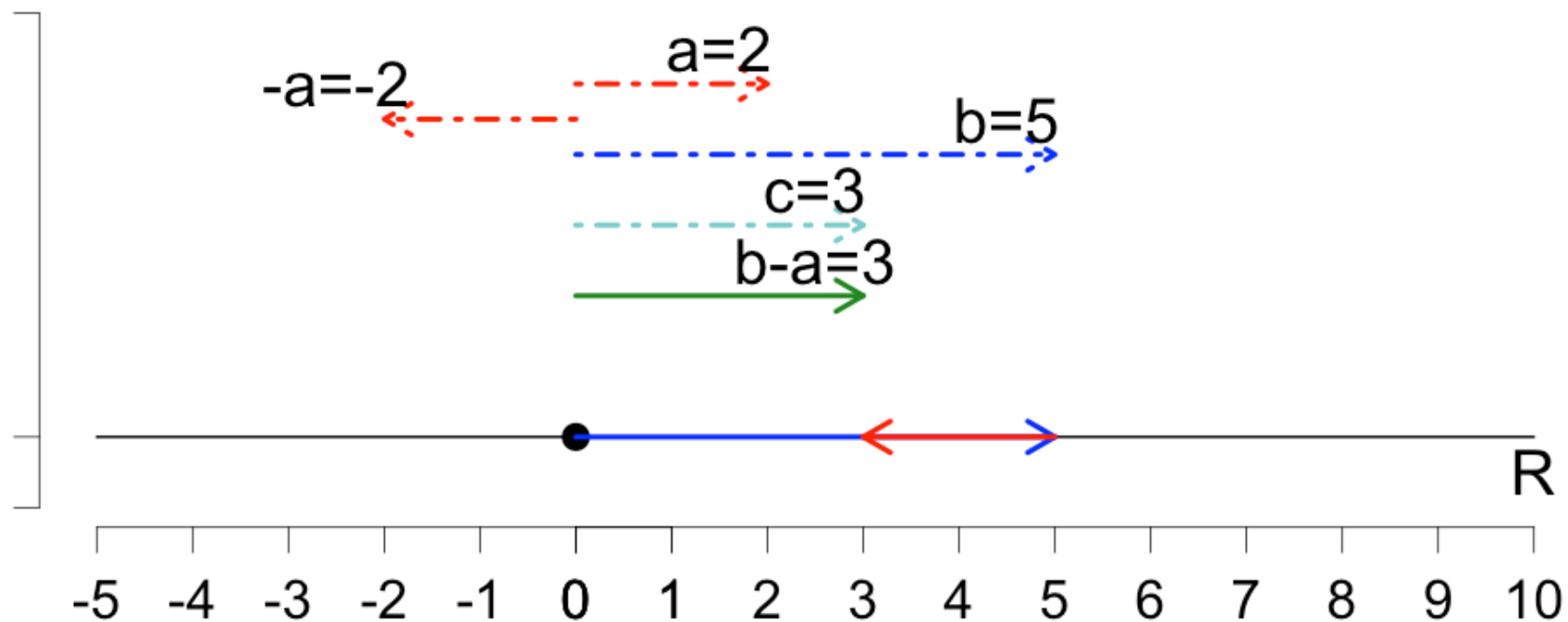
Optellen is volgens de Grieken
pijltjes aan elkaar plakken



Aftrekken: $b-a=b+(-a)$



Aftrekken: $b-a=b+(-a)$



Van optellen naar aftrekken

- Definitie van aftrekken
 - $a - b = a + (-b)$
 - Het **omgekeerde** van optellen

Quiz

- Wat is:
 - $a - (-b) = ??$
- Waar?
 - $a - b = b - a$

Quiz

- Waar?
 - $a - b = b - a$

a	b	a-b	Result	b-a	Result
0	0	0-0	0	0-0	0
1	0	1-0	1	0-1	-1
0	1	0-1	-1	1-0	1
1	1	1-1	0	1-1	0

Inhoudsopgave

- Wiskunde en psychologie
- Doelstelling van de module
- Opzet van de module
- **Algebra: reken regels**
 - Optellen
 - **Vermenigvuldigen**
- Algebra: reken regels voor exponenten
- Volgende les: Functies

Vermenigvuldigen

- Associatief:
 - $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Eenheid: Er is een 1 zodat
 - $a \cdot 1 = a$ en $1 \cdot a = a$
- Inverse: Voor elke $a \neq 0$, is er een b zodat
 - $a \cdot b = 1$ en $b \cdot a = 1$
 - En we noemen $b = 1 / a$
- Commutatief
 - $a \cdot b = b \cdot a$

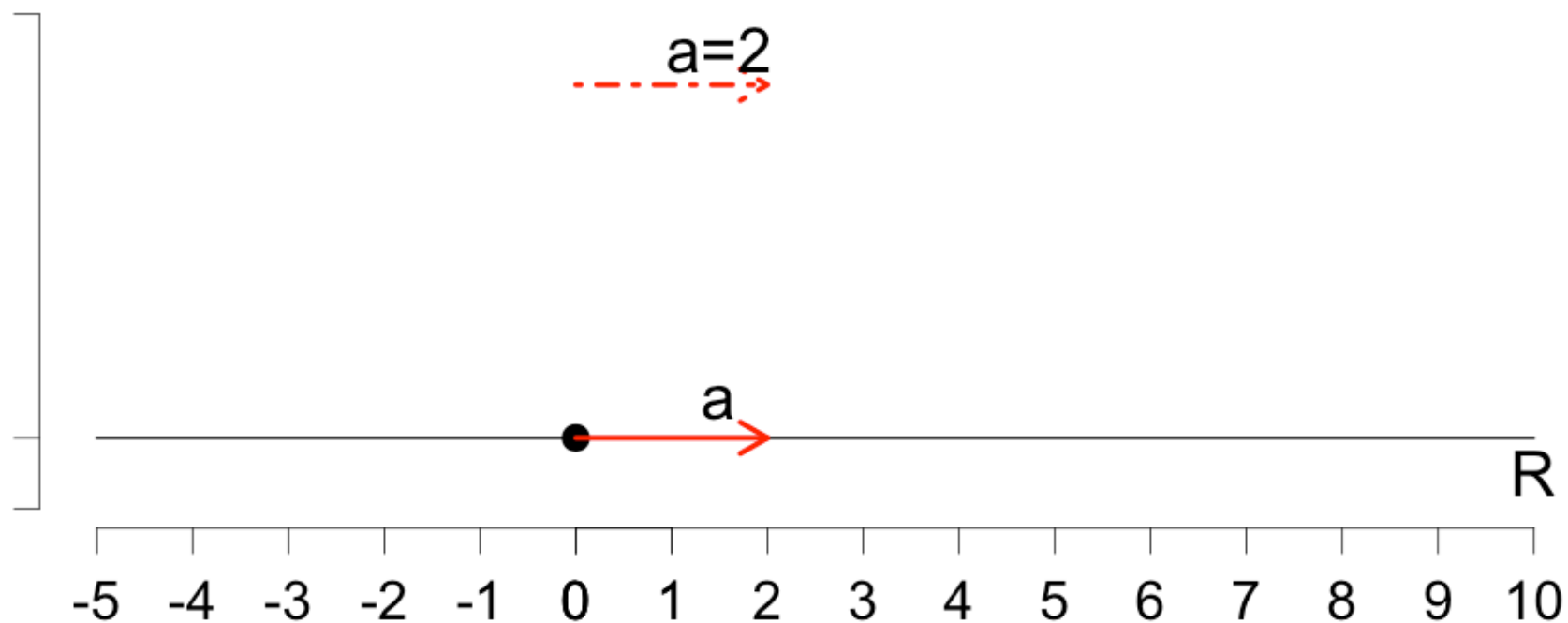
Vermenigvuldigen

- Associatief:
 - $(2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4)$
- Eenheid: Er is een 1 zodat
 - $3 \cdot 1 = 3$ en $1 \cdot 3 = 3$
- Inverse: Voor elke $a \neq 0$, is er een b zodat
 - $2 \cdot b = 1$ en $b \cdot 2 = 1$
 - En we noemen $b = 1/2$
- Commutatief
 - $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$

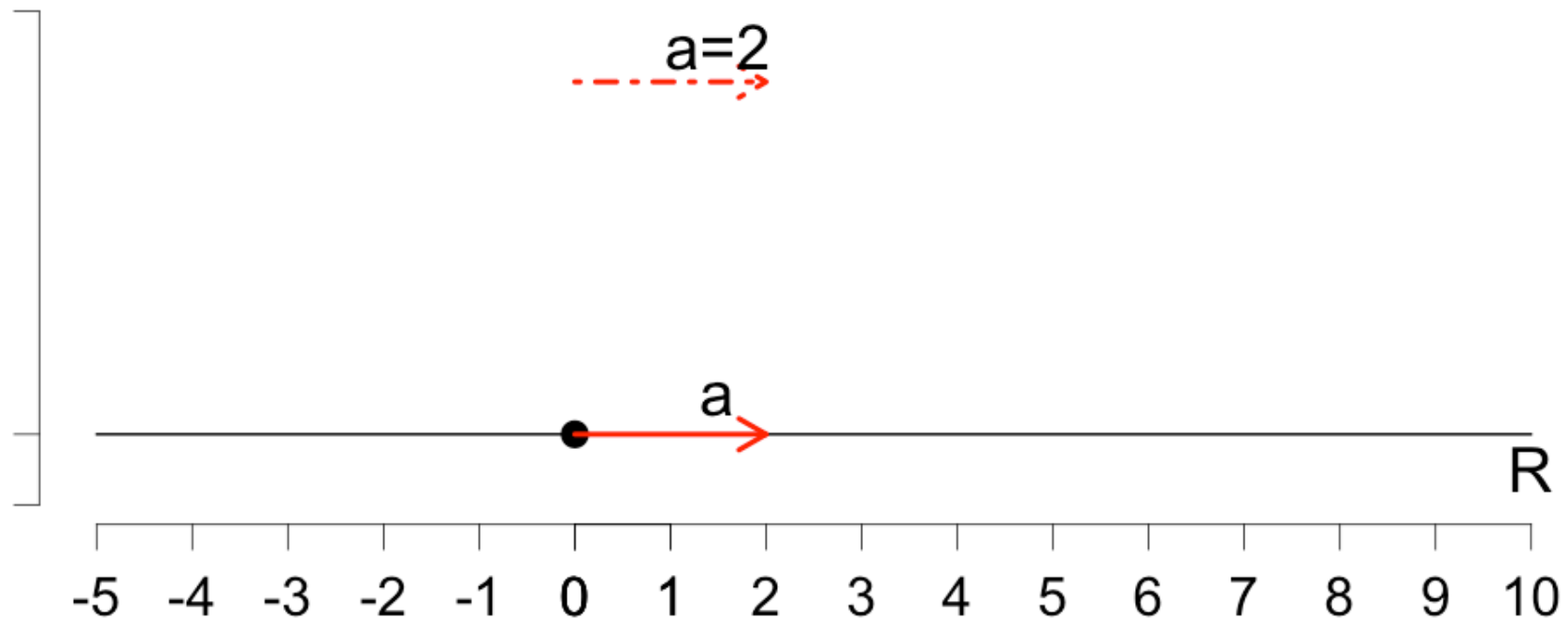
Getallenlijn: Eenheid



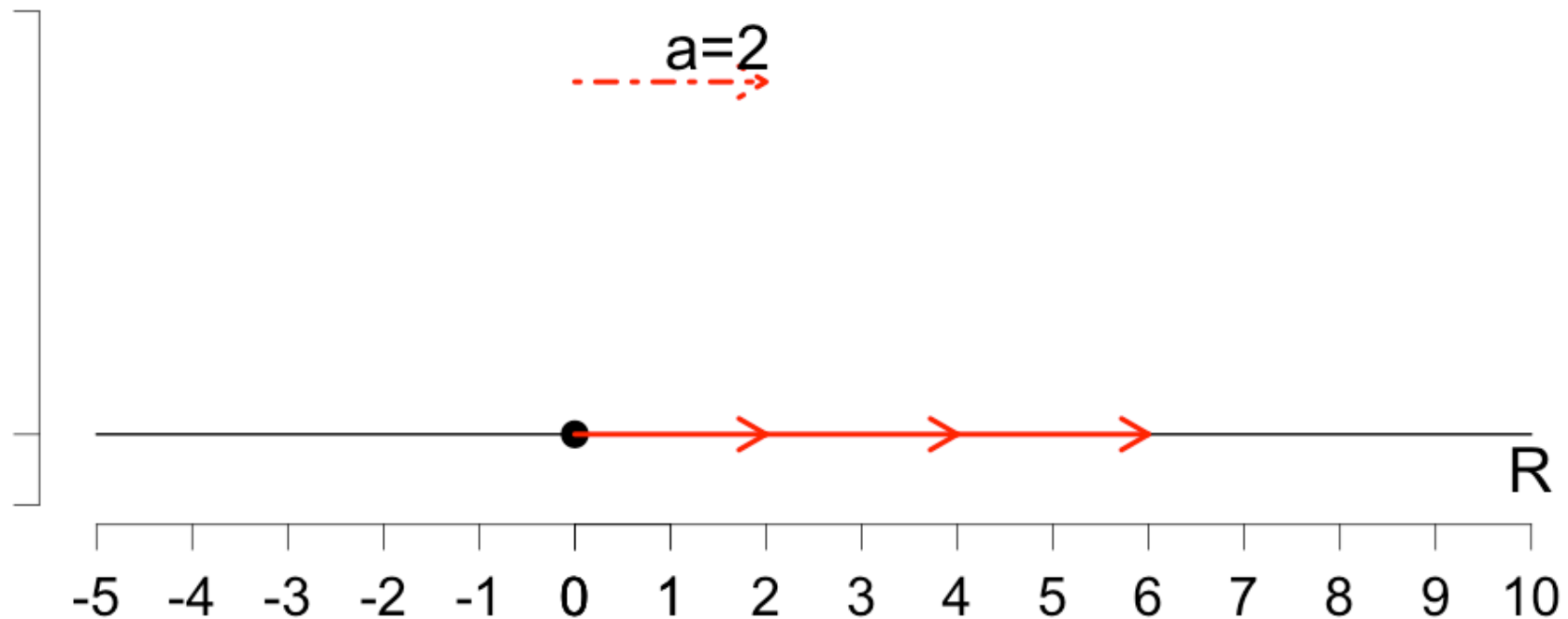
Vermenigvuldigen: $3a$



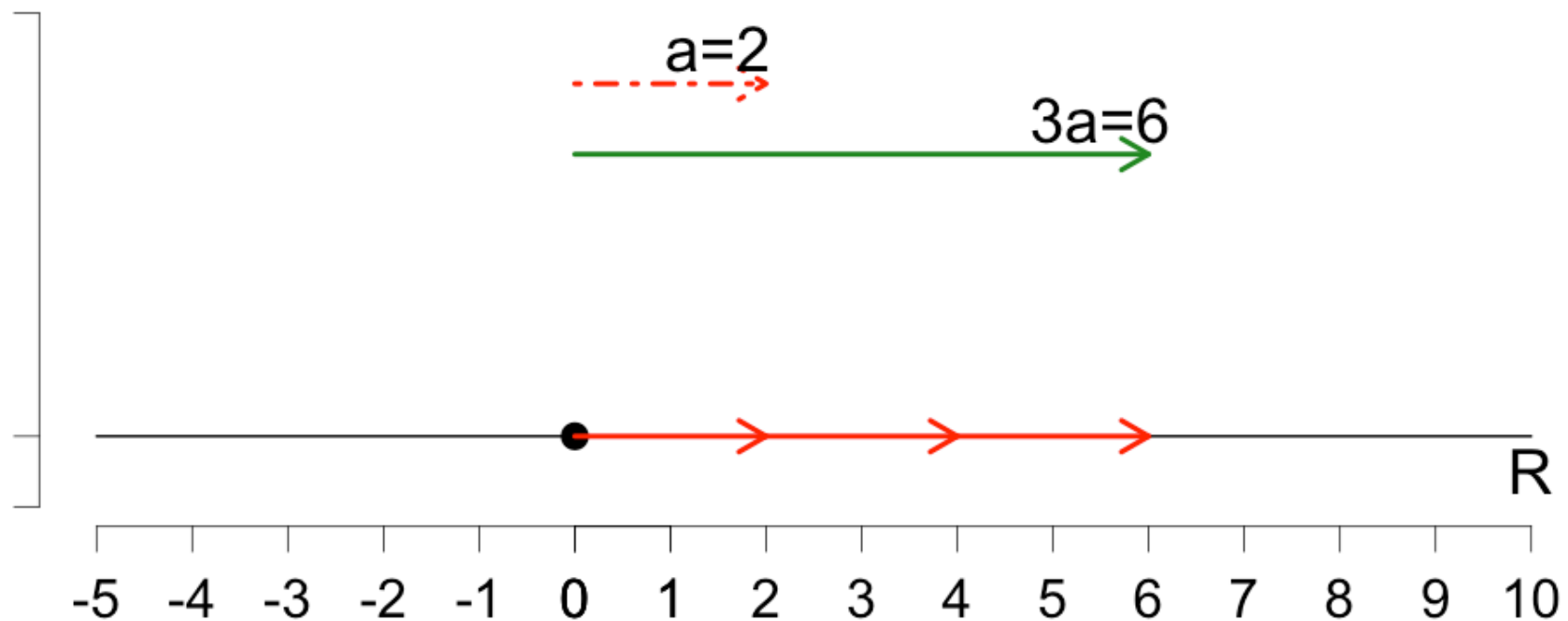
Vermenigvuldigen: $3a = a + a + a$



Vermenigvuldigen: $3a = a + a + a$



Vermenigvuldigen: $3a = a + a + a$



Vermenigvuldigen is volgens
de Grieken pijltjes opblazen



Vermenigvuldigen

- Associatief:
 - $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Identiteit: Er is een 1 zodat
 - $a \cdot 1 = a$ en $1 \cdot a = a$
- Inverse: Als er een b is zodat
 - $a \cdot b = 1$ en $b \cdot a = 1$
 - Dan $b = 1/a$
- Commutatief
 - $a \cdot b = b \cdot a$

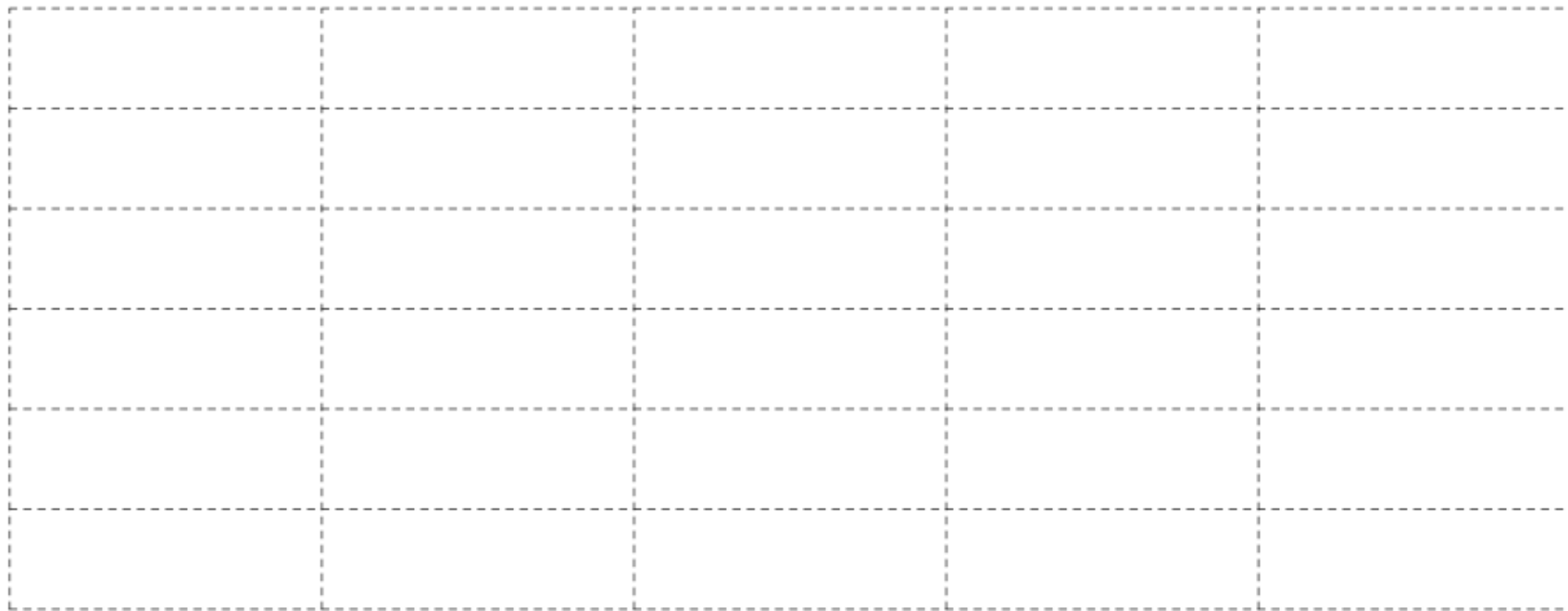
Van vermenigvuldigen naar delen

- Definitie van aftrekken
 - $a - b = a + (-b)$
 - $a/b = a(1/b)$

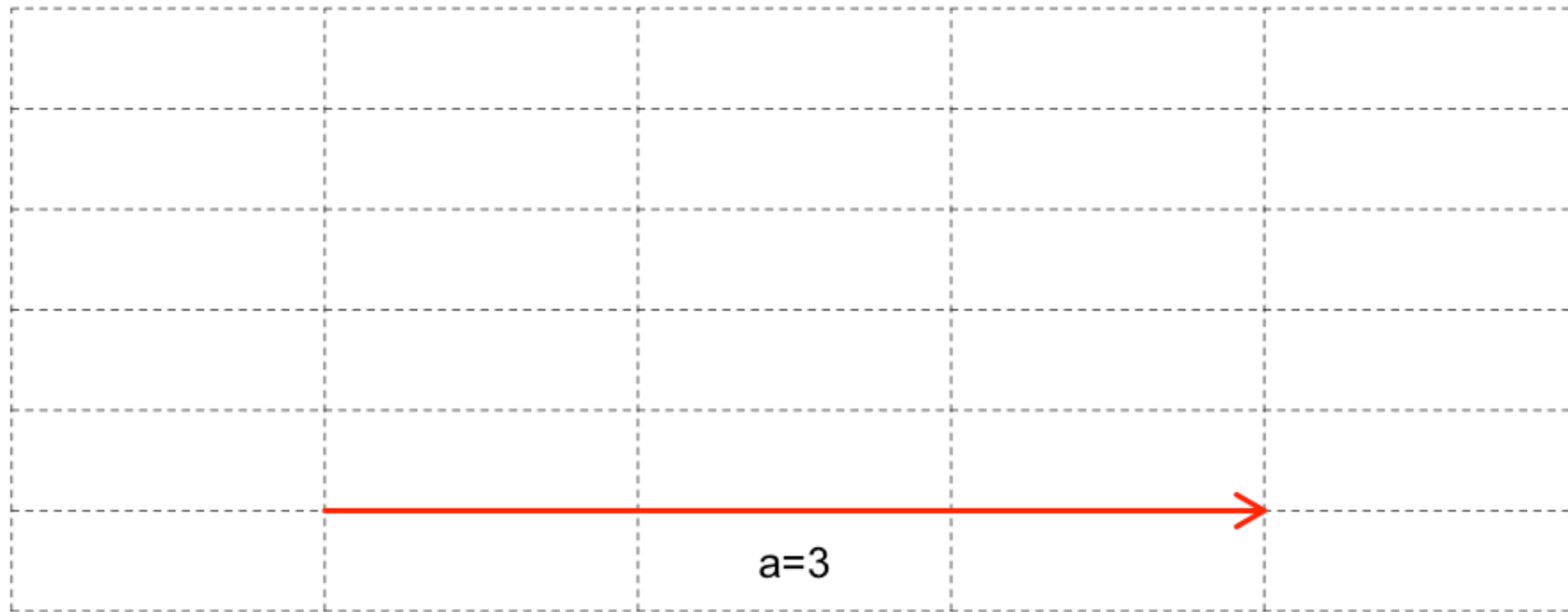
Quiz

- Waar?
 - $a/b = b/a$
- Wat is:
 - $a/(1/b) = ??$

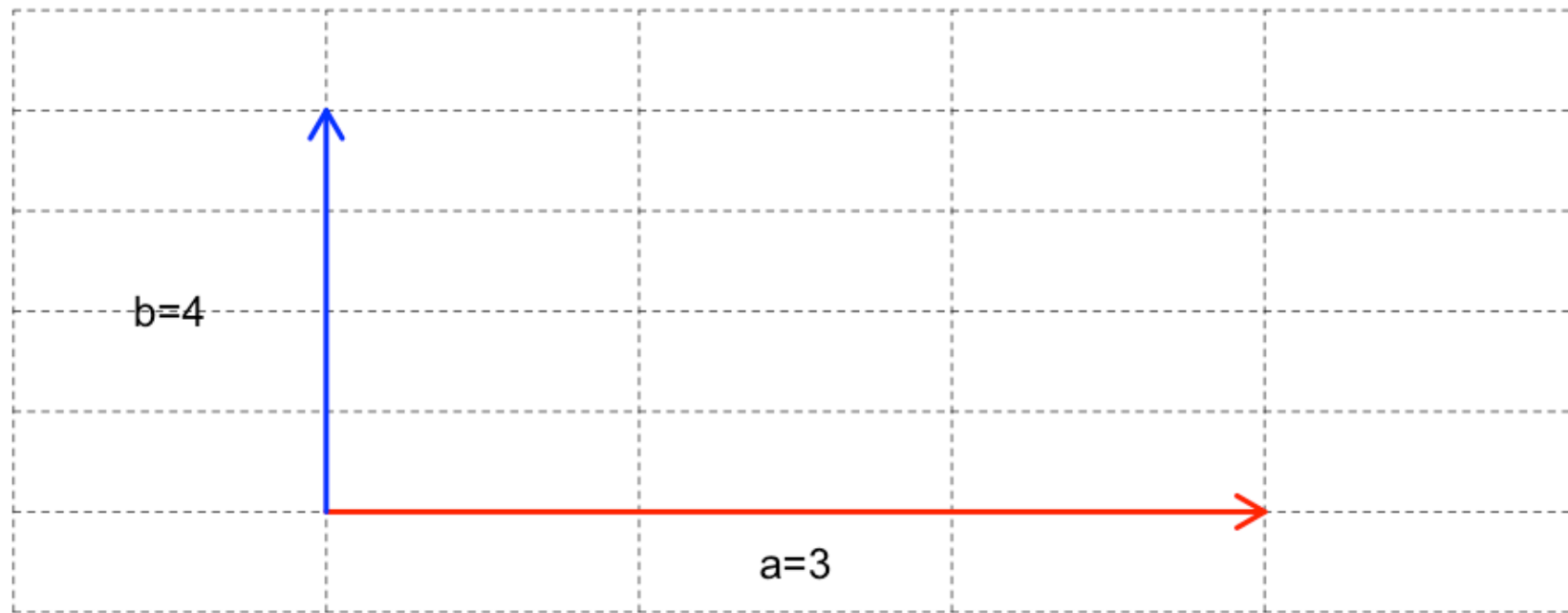
Producten als oppervlakten



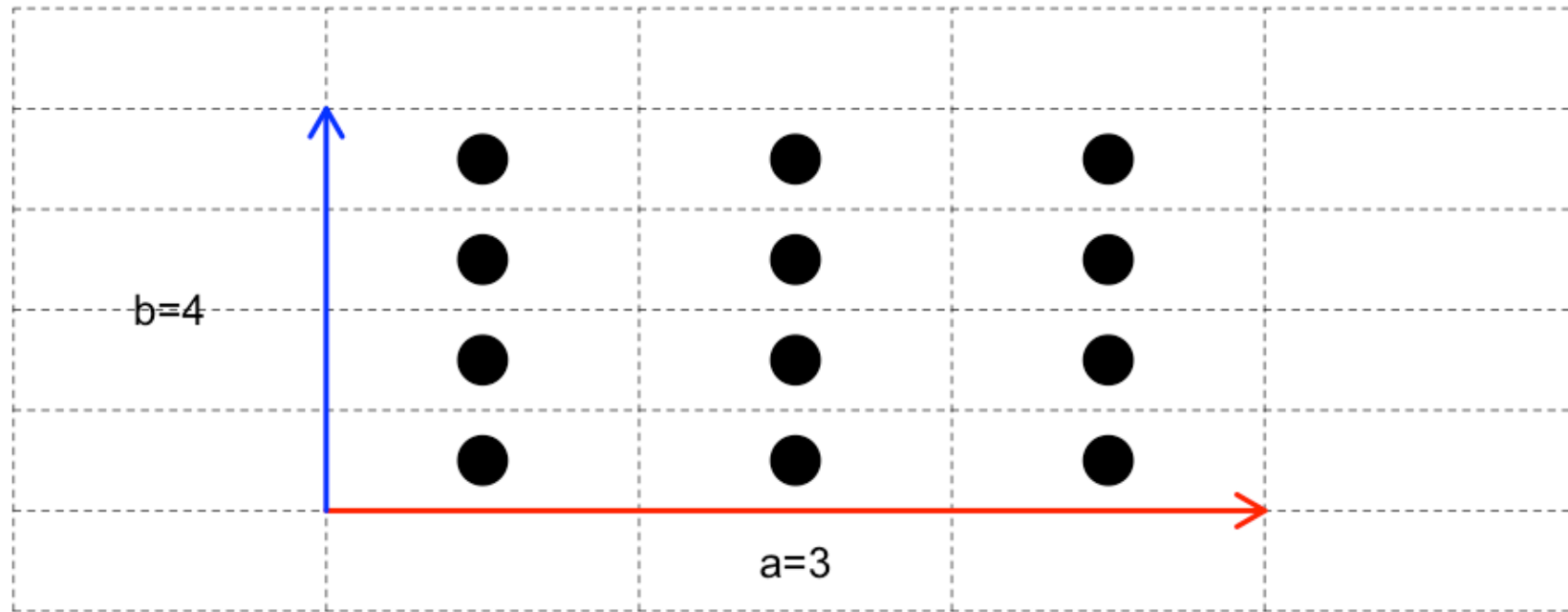
Producten als oppervlakten



Producten als oppervlakten

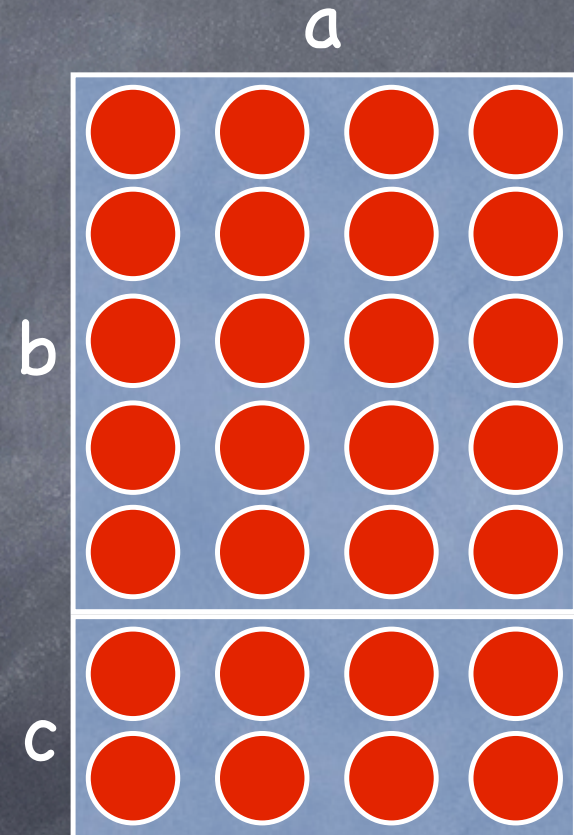


Producten als oppervlakten



Quiz: Combinatie optellen en vermenigvuldigen

- Wat is:
 - $a(b + c) = ??$
 - $(a + b)c = ??$



Combinatie optellen en vermenigvuldigen

- Distributief:
 - $a (b + c) = ab + ac$
 - $(a + b) c = ac + bc$
- Voorbeeld:
 - $3 (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 12 + 15$
 - $3 (4 + 5) = 3 \cdot 9 = 27$

Quiz: Rekenregels en vermenigvuldigen met -1

- Distributief
 - $a(b + c) = ab + ac$
 - $(a + b)c = ac + bc$
- Wat is:
 - $a(b - c) = ??$
 - $-(a + b) = ??$

A: Rekenregels en vermenigvuldigen met -1

- Wat is:
 - $a(b - c) = ab - ac$
 - $-(a + b) = -a + (-b)$
- Voorbeeld:
 - $6(7 - 2) = 6 \cdot 7 - 6 \cdot 2 = 30$
 - $6(7 - 2) = 6 \cdot 5 = 30$
- Voorbeeld:
 - $-(7 + 2) = -7 - 2 = -9$

Algebra truck

- Nul element:
 - $a - a = 0$
 - $a = a + (b - b) = a + b - b$
 - $b + a - b = a + \cancel{b} - \cancel{b} = a$
- Identiteit:
 - Als $b \neq 0$
 - $a = a \cdot 1 = a \cdot b / b = a \cdot b \cdot (1/b)$

$$\frac{\cancel{a \cdot b}}{\cancel{b}} = a$$

Quiz: breuken

$$\frac{a}{b} \frac{c}{d} = ??$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ??$$



Rekenregels voor breuken volgen van buiten haakjes halen

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

rekenregels

voorbeeld

$$a (1/a) = 1$$

$$a/b = a (1/b)$$

$$2/7 = 2 (1/7)$$

$$a (b/a) = b \quad a (1/a) = 1$$

$$7(2/7) = 2$$

$$\boxed{\frac{\cancel{a}b}{\cancel{a}} = b}$$

$$a/(-b) = -(a/b) = (-a)/b$$

$$2/(-7) = -(2/7) = (-2)/7$$

$$(-a)/(-b) = a/b$$

$$(-2)/(-7) = 2/7$$

$$a/0 = \text{niet gedefinieerd} \quad (\text{soms } \pm\infty)$$

Al deze rekenregels worden gebruikt om algebraïsche uitdrukkingen te vereenvoudigen

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a/b = a(1/b) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$a(b/a) = b$$

bijv. $\frac{3}{1/4} = \frac{3}{1/4} \frac{4}{4} = \frac{3 \cdot 4}{1/4 \cdot 4} = 3 \cdot 4 = 12$

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$a/b = a(1/b) \quad \Rightarrow$$

$$b/d + c/d = (b + c)/d$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$\text{met } (a/b)(d/d) = a/b \Rightarrow$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Optellen

- Associatief:
 - $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Identiteit: Er is een nul element
 - $a + 0 = a$ en $0 + a = a$
- Inverse: Voor elke a is er een b
 - $a + b = 0$ en $b + a = 0$
 - En we noemen $b = -a$
- Commutatief
 - $a + b = b + a$



Vermenigvuldigen

- Associatief:
 - $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Eenheid: Er is een 1 zodat
 - $a \cdot 1 = a$ en $1 \cdot a = a$
- Inverse: Voor elke $a \neq 0$, is er een b zodat
 - $a \cdot b = 1$ en $b \cdot a = 1$
 - En we noemen $b = 1 / a$
- Commutatief
 - $a \cdot b = b \cdot a$

Natuurlijke getallen: Getallen op basis van optellen

Natuurlijke getallen N

1
●

2
●

3
●

4
●

lijn

Gehele getallen: Verkregen van “inverse” optellen

Gehele getallen \mathbb{Z}

-2
○

-1
○

0
●

1
○

2
○

3
○

4
○

lijn

Rationele getallen: “Inverse” vermenigvuldigen

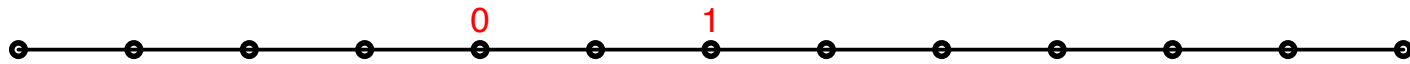
Rationele getallen \mathbb{Q}

-2 -1.5 -1 -0.5 0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4

lijn

Reële getallen: Gaten vullen

Reële getallen \mathbb{R}



lijn

Inhoudsopgave

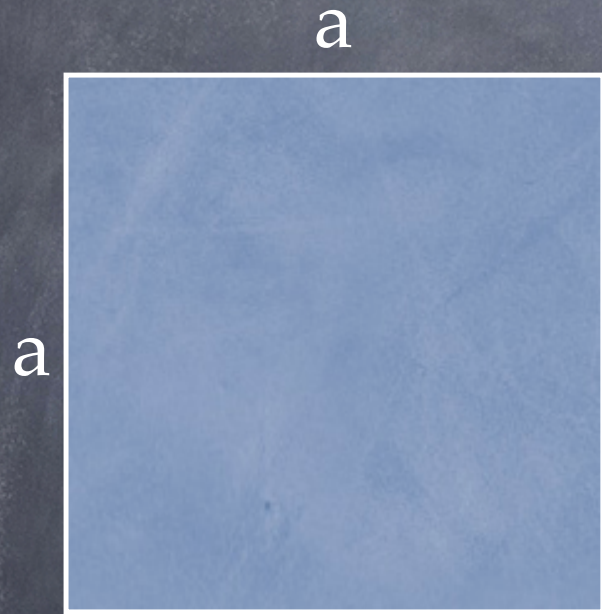
- Wiskunde en psychologie
- Doelstelling van de module
- Opzet van de module
- Algebra: reken regels
- Algebra: reken regels voor exponenten
 - Optellen
 - Vermenigvuldigen
- Volgende les: Functies

Quiz: Exponenten

- $a^n = ??$



Exponenten worden gebruikt om herhaalde vermenigvuldiging en deling verkort te noteren



$$\text{Opp.} = a \cdot a \equiv a^2$$

$$a \cdot a \cdot a = a^3$$

$$a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$$

... etcetera

Voor een positief geheel getal n ($= 1, 2, 3, \dots$)

schrijven we a^n voor $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ keer}}$

Quiz

Voor een positief geheel getal n ($= 1, 2, 3, \dots$)
schrijven we a^n voor $a \cdot a \cdot \dots \cdot a$
 n keer

- Wat is:
 - $a^n a^m = ??$

Zo gedefinieerd is reken met exponenten
gewoon optellen en vermenigvuldigen

$$a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$$

$$\begin{aligned} (a^n) (a^m) &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_n \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_m \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n+m} \\ &= a^{n+m} \end{aligned}$$



bijv.: $a^2 a^7 = a^{2+7} = a^9$

Quiz: Optellen van exponenten

- Geldt voor exponenten a^n ?
- De optelregels?
 - Commutatief: $n+m = m+n$
 - Associatief: $(1+m)+n = 1+(m+n)$
 - Inverse: Is er voor elke n een inverse?
 - Nul element: Is er een nulelement?

Quiz: Optellen van exponenten

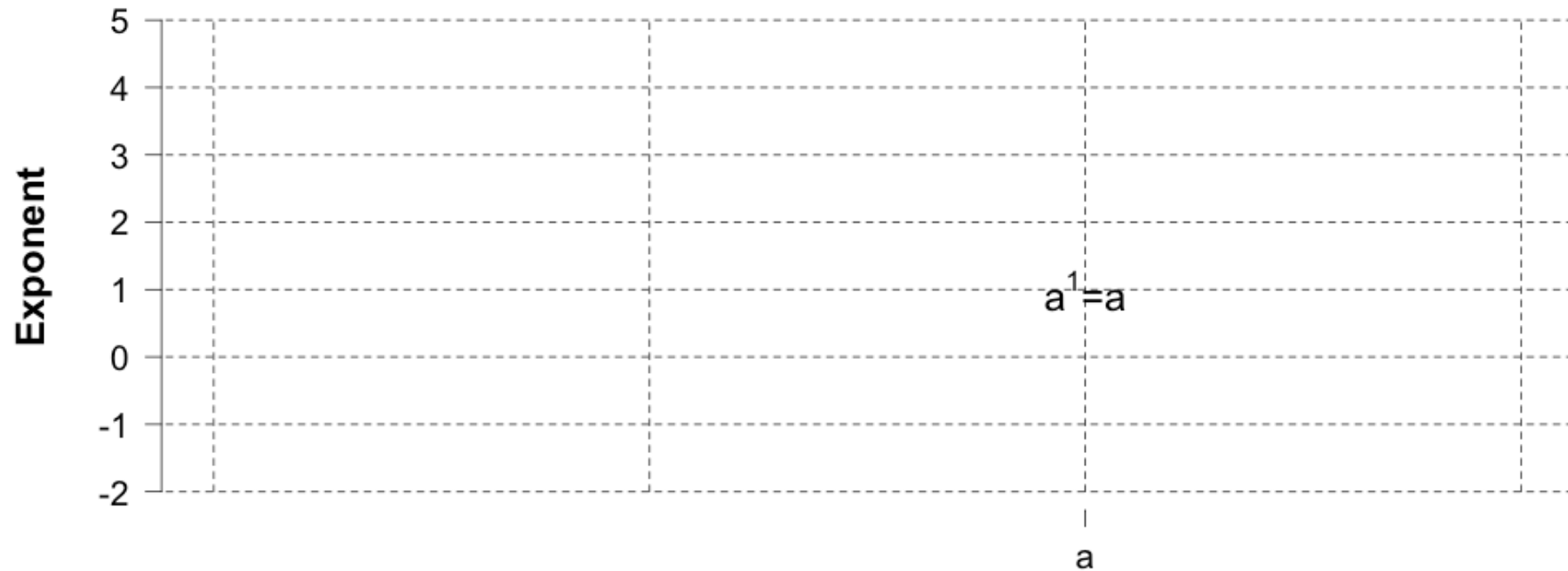
- Commutatief: $n+m = m+n$
- $a^{n+m} = a^n a^m = a^{m+n}$
- Associatief:
 - $a^{(l+m)+n} = a^{l+m+n} = a^{l+(m+n)}$
- Bestaat inverse?
 - $a^{-n} = ??$
- Is er een nul element?
 - $a^0 = ??$



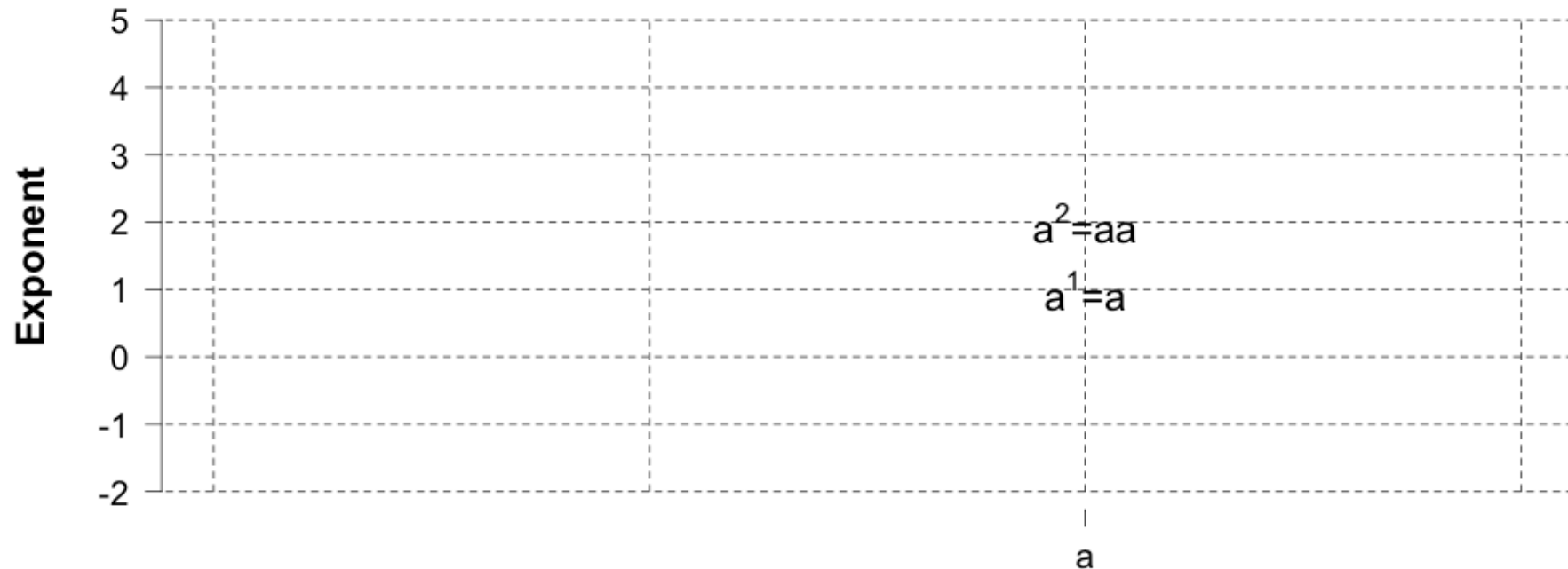
Optellen van exponenten



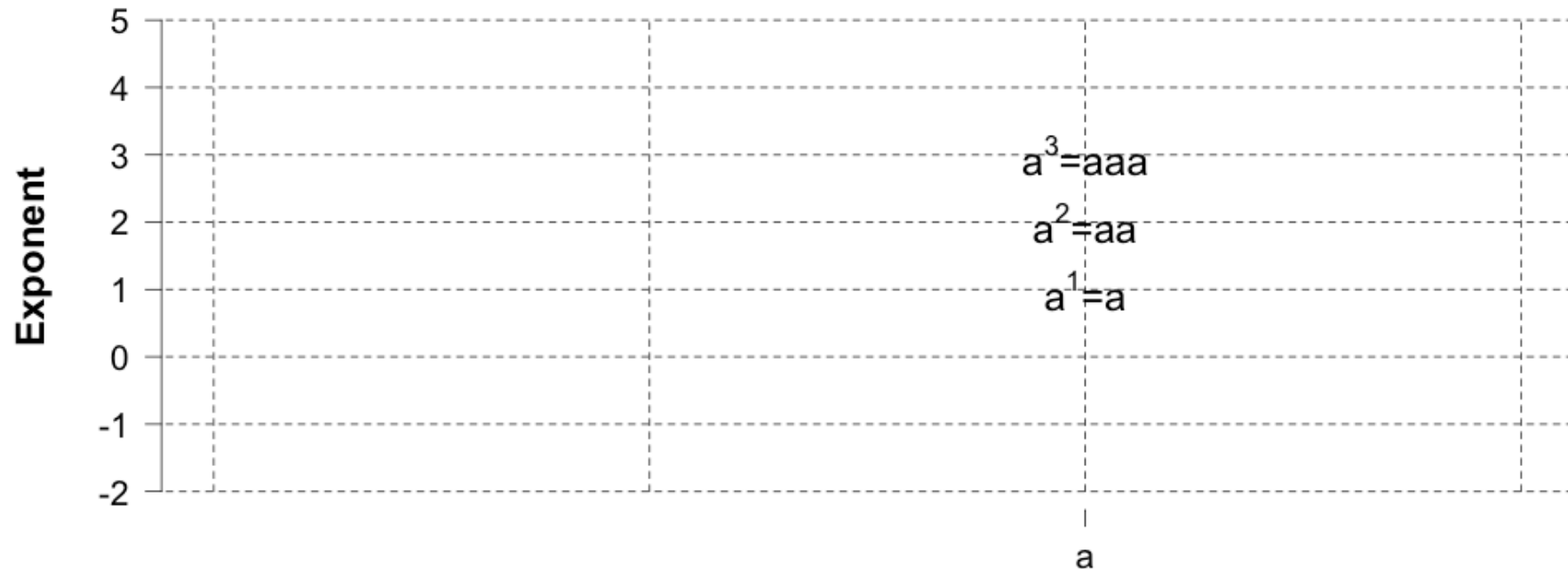
Optellen van exponenten



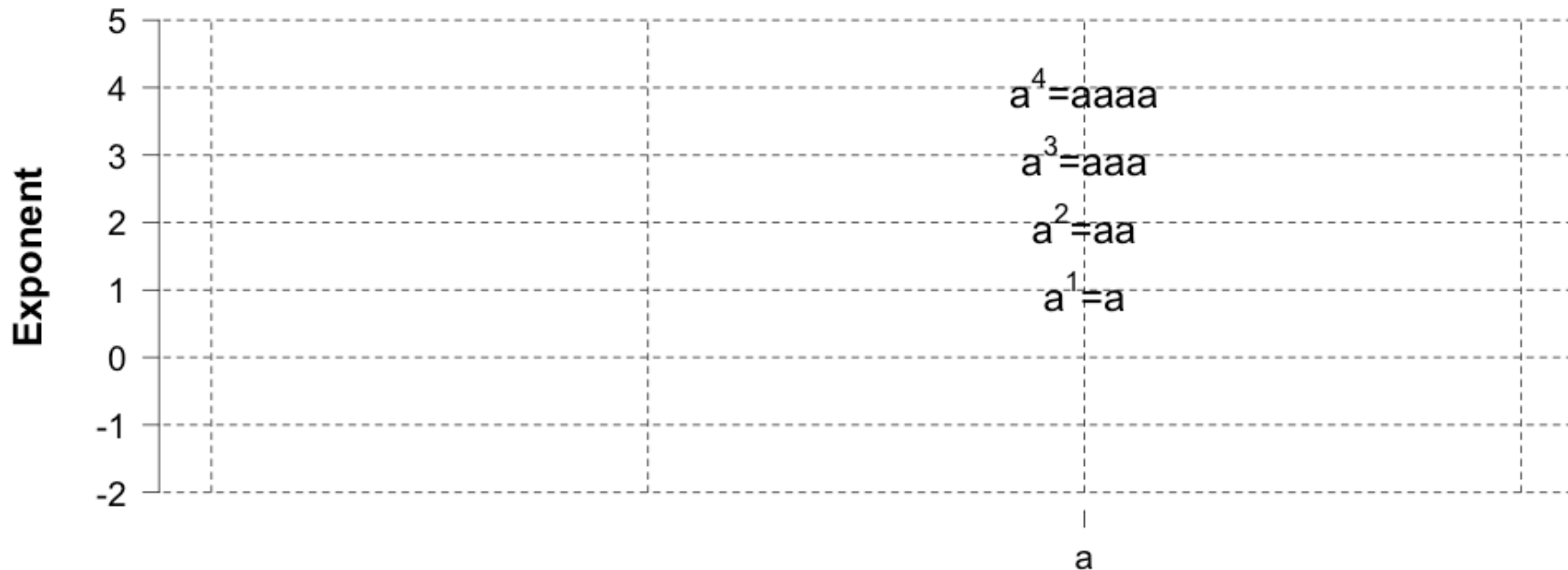
Optellen van exponenten



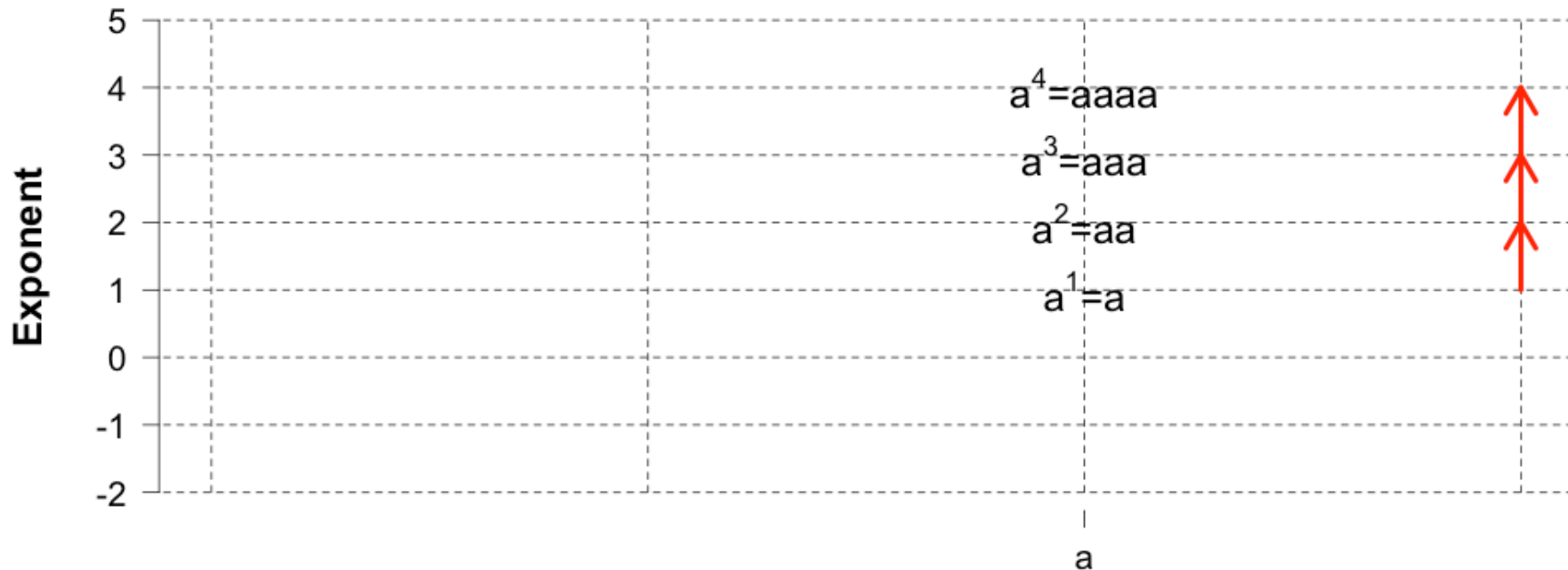
Optellen van exponenten



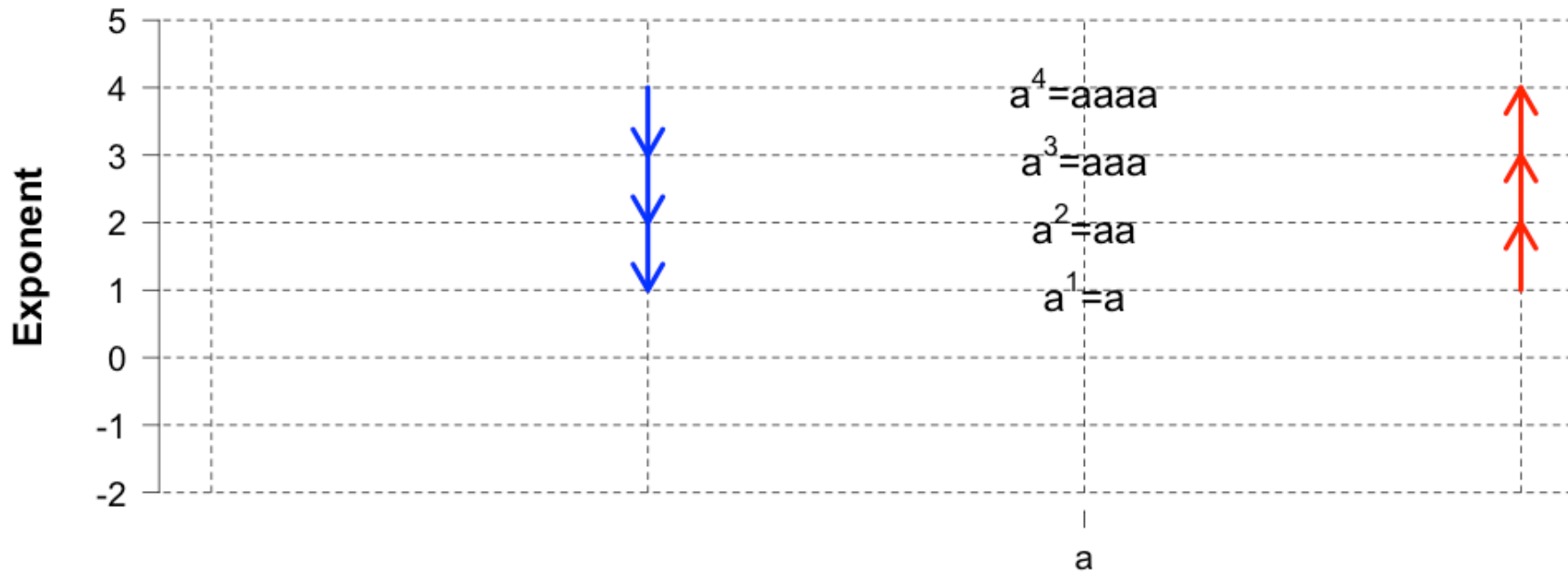
Optellen van exponenten



Quiz: Aftrekken van exponenten



Optellen van exponenten



Exponenten worden gebruikt om herhaalde vermenigvuldiging en deling verkort te noteren

Voor een positief geheel getal n ($= 1, 2, 3, \dots$)
schrijven we a^n voor $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ keer}}$

Delen door $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ keer}}$ verkorten we met a^{-n}

$$\text{d.w.z., } a^{-n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}$$

$$\text{speciaal geval: } a^{-1} = 1/a$$

Zo gedefinieerd is reken met exponenten net zo eenvoudig als optellen en vermenigvuldigen

$$a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \qquad a^{-n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}$$

regel 1: $(a^n)(a^m) = a^{n+m}$

regel 2: $(a^n)(a^{-m}) = \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cdots \cdot a \cdot \frac{1}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cdots \cdot a}$
 $= a^{n-m}$

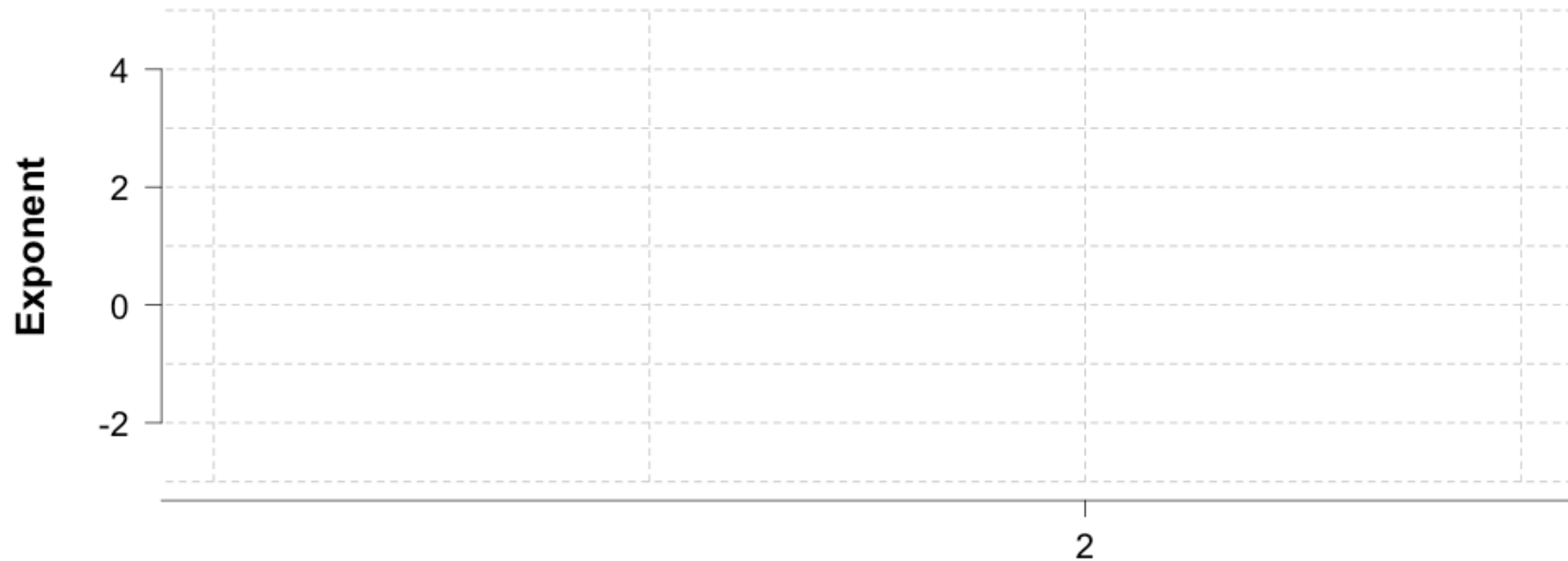
bijv.: $a^7 a^{-2} = a^{7-2} = a^5 \quad \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \frac{1}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}}$
 $a^2 a^{-7} = a^{2-7} = a^{-5} \quad \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \frac{1}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}$

Quiz:

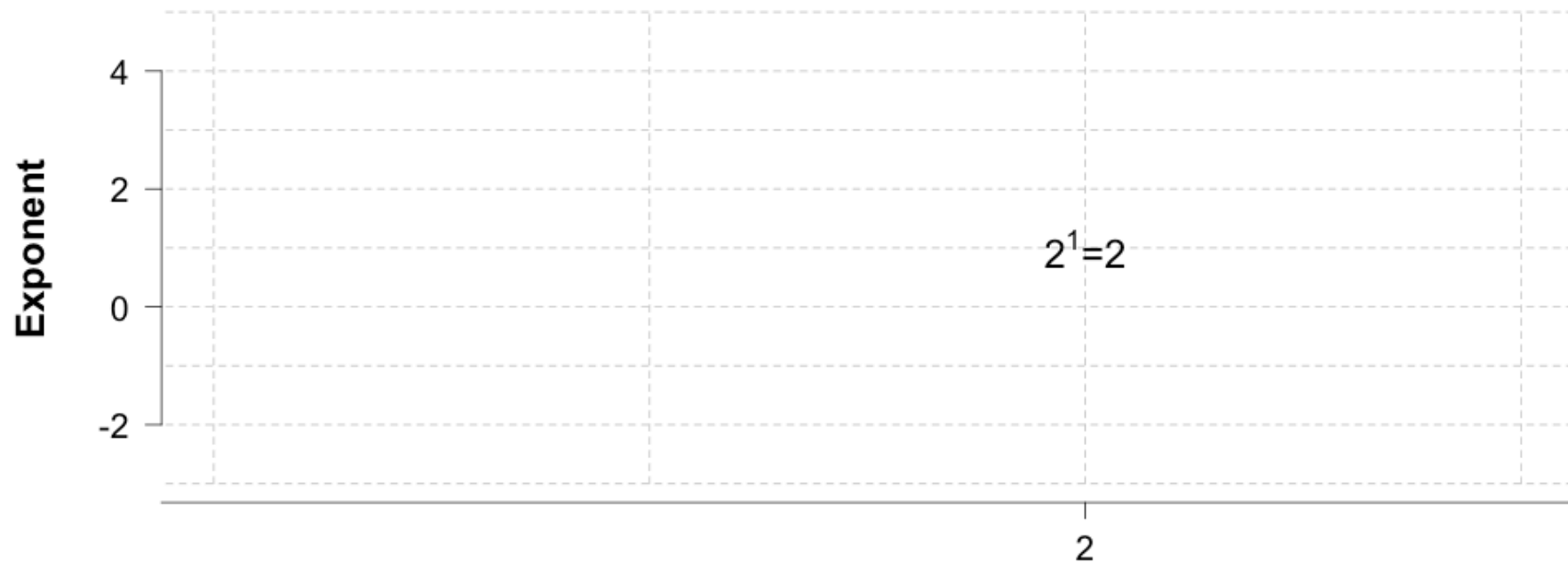
- Commutatief: $n+m = m+n$
- Associatief:
- Inverse van n is $-n$
- $a^{-n} = \frac{1}{a \cdot a \cdots a}$
- Identiteit: Is er een 0??
 - $a^0 = ??$



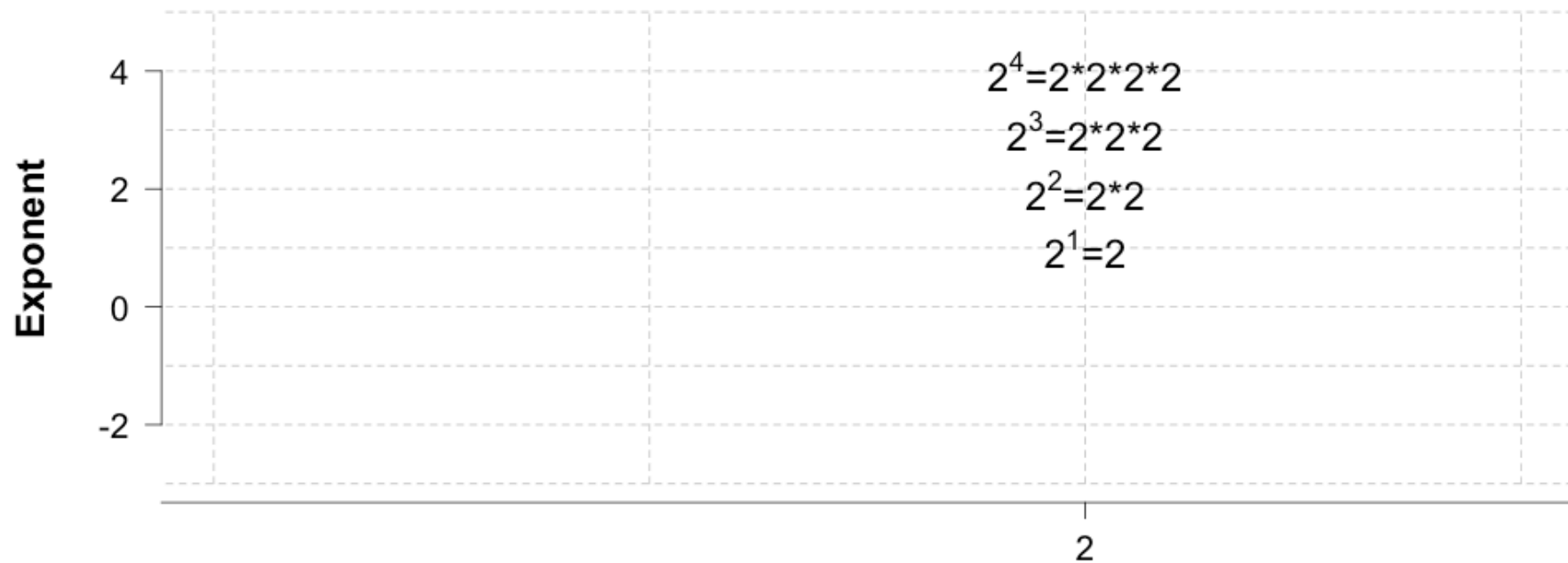
Optellen van exponenten



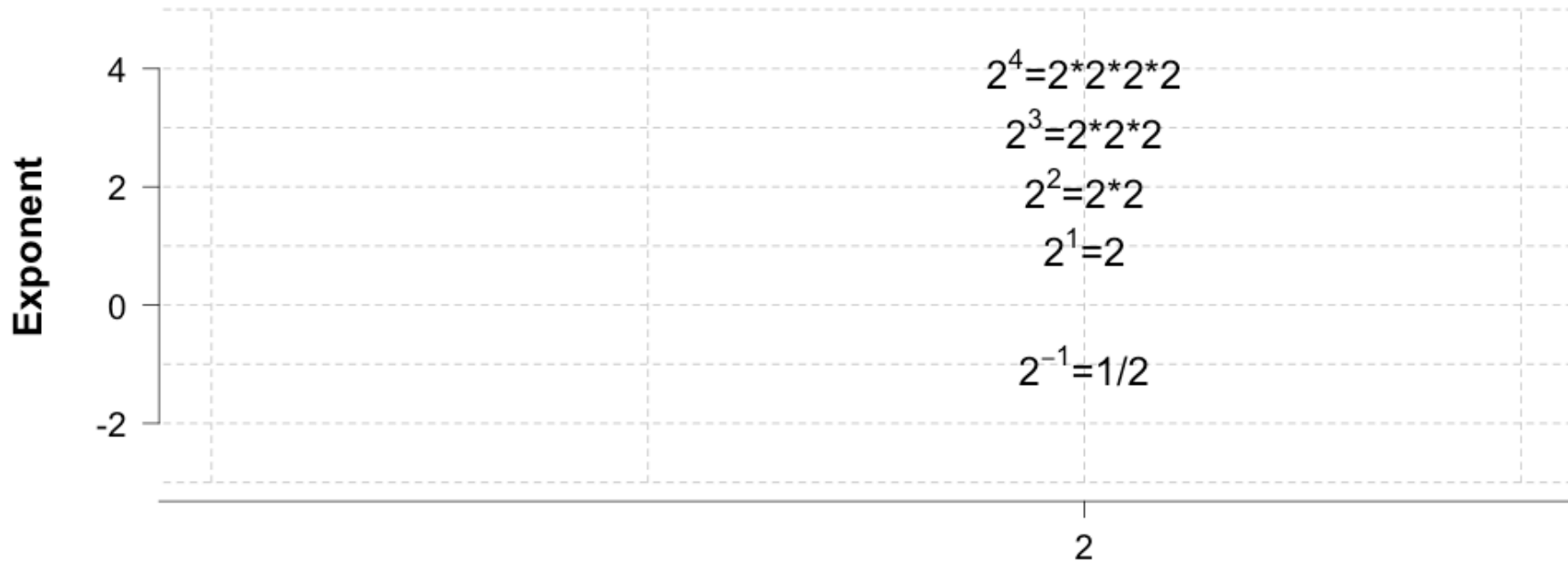
Optellen van exponenten



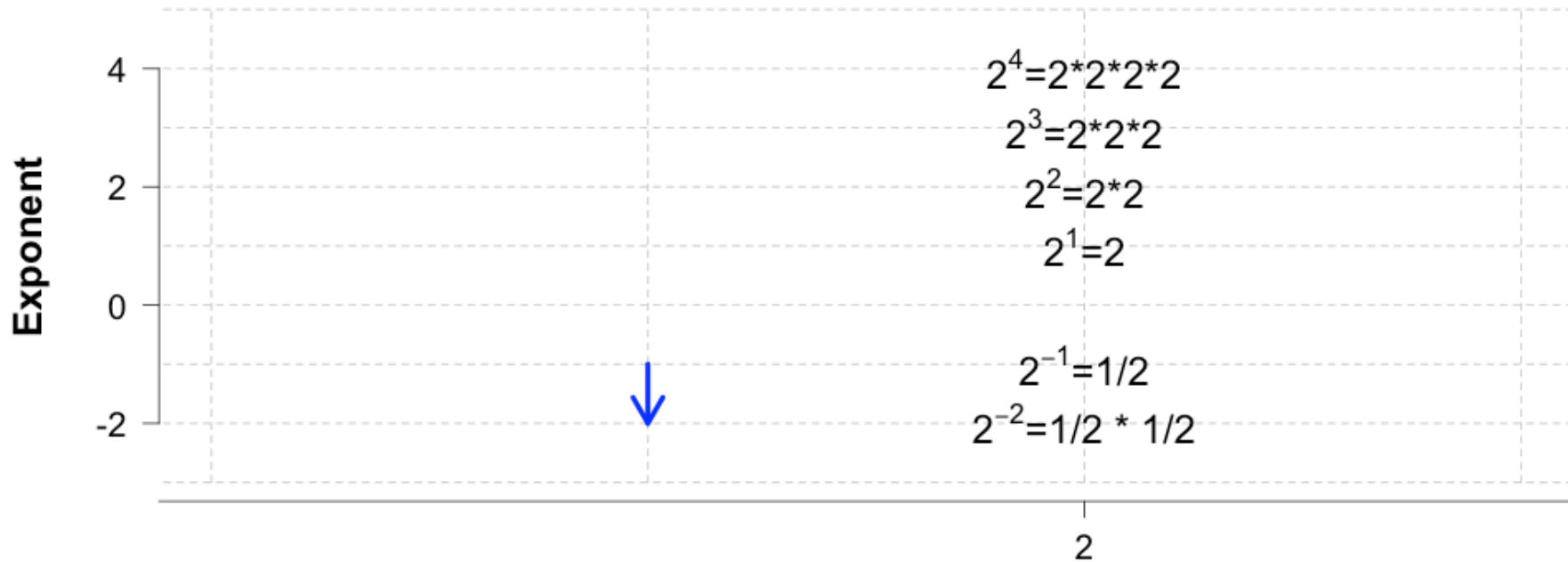
Quiz: $2^{-1} = ?$



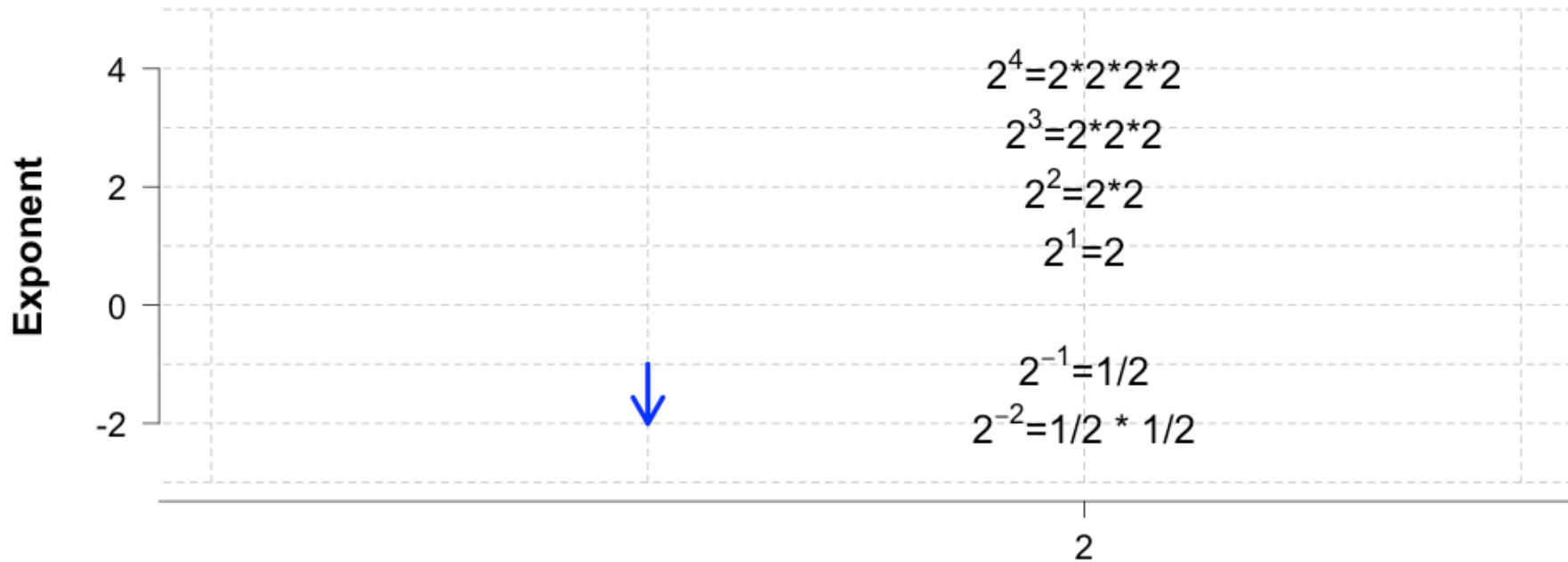
Aftrekken van exponenten



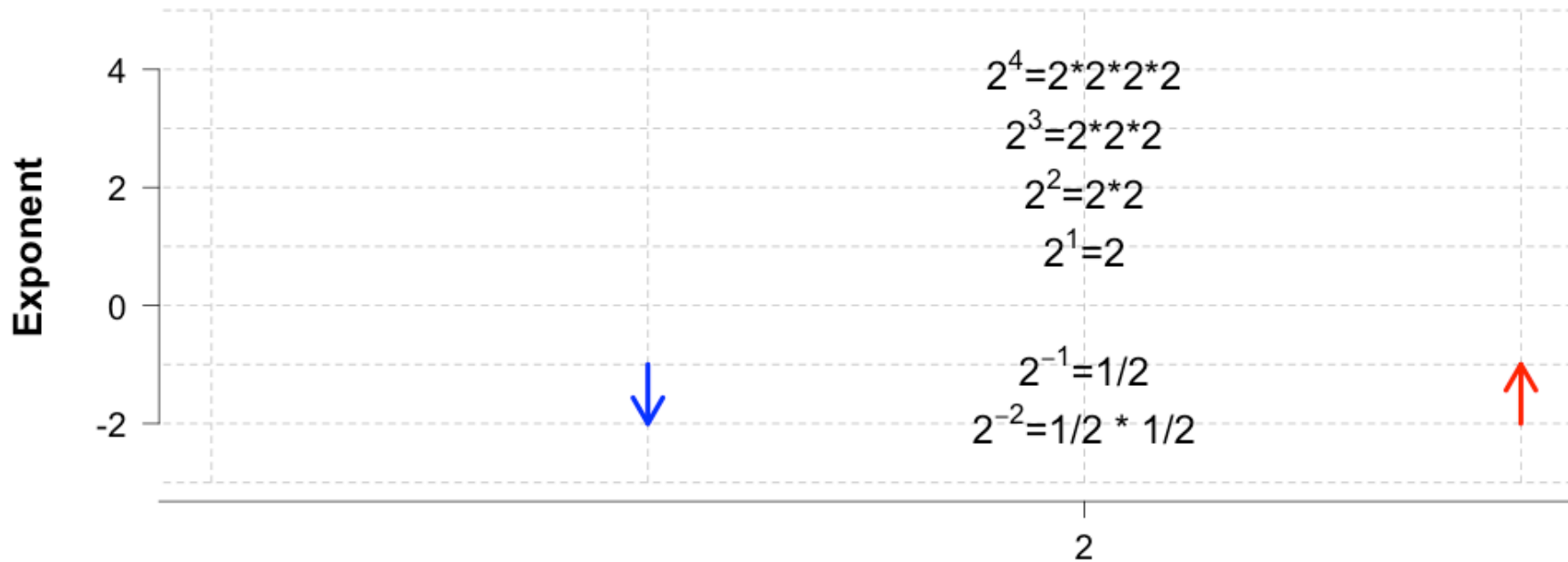
Aftrekken van exponenten



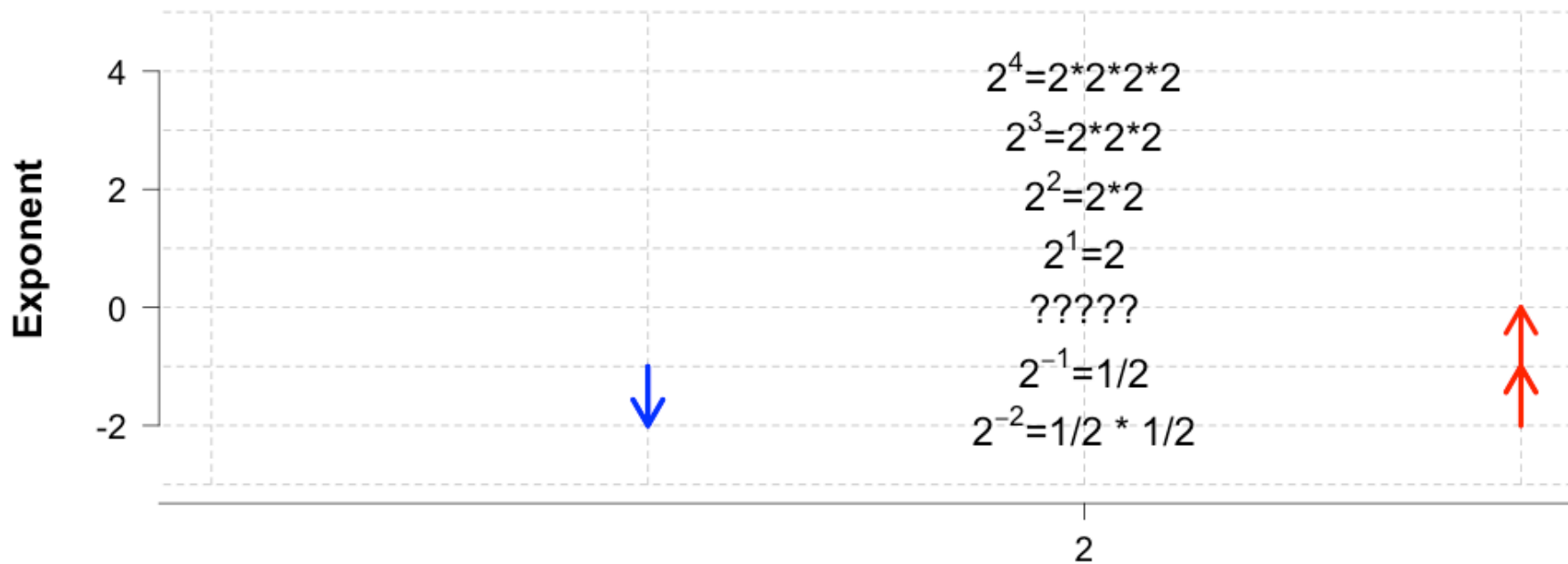
Aftrekken van exponenten



Optellen van exponenten



Optellen van exponenten



Zo gedefinieerd is reken met exponenten net zo eenvoudig als optellen en vermenigvuldigen

$$a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \qquad a^{-n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}$$

regel 1: $(a^n) (a^m) = a^{n+m}$

regel 2: $(a^n) (a^{-m}) = a^{n-m}$

regel 3: $a^0 = 1$ (als $a \neq 0$)

omdat $a^0 = a^{n-n} = a^n a^{-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$

Quiz

$$a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}$$

regel 1: $(a^n) (a^m) = a^{n+m}$

regel 2: $(a^n) (a^{-m}) = a^{n-m}$

regel 3: $a^0 = 1$ (als $a \neq 0$)

regel 4: $a^{nm} = ???$

Inhoudsopgave

- Wiskunde en psychologie
- Doelstelling van de module
- Opzet van de module
- Algebra: reken regels
- Algebra: reken regels voor exponenten
 - Optellen
 - Vermenigvuldigen
- Volgende les: Functies

Zo gedefinieerd is reken met exponenten net zo eenvoudig als optellen en vermenigvuldigen

$$a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}$$

regel 1: $(a^n)(a^m) = a^{n+m}$

regel 2: $(a^n)(a^{-m}) = a^{n-m}$

regel 3: $a^0 = 1$ (als $a \neq 0$)

regel 4: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Zo gedefinieerd is reken met exponenten net zo eenvoudig als optellen en vermenigvuldigen

$$a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \qquad a^{-n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}$$

regel 1: $(a^n)(a^m) = a^{n+m}$

regel 2: $(a^n)(a^{-m}) = a^{n-m}$

regel 4:
$$\begin{aligned} (a^n)^m &= \underbrace{(a^n)(a^n) \cdots (a^n)}_m \\ &= (a \cdots a)(a \cdots a) \cdots (a \cdots a) \\ &= a^{n \cdot m} \end{aligned}$$

Zo gedefinieerd is reken met exponenten net zo eenvoudig als optellen en vermenigvuldigen

$$a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \qquad a^{-n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}$$

regel 1: $(a^n)(a^m) = a^{n+m}$

regel 2: $(a^n)(a^{-m}) = a^{n-m}$

regel 4: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

bijv.: $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$

$$(a^2)^3 = (a \cdot a)(a \cdot a)(a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

Zo gedefinieerd is reken met exponenten net zo eenvoudig als optellen en vermenigvuldigen

$$a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}$$

regel 1: $(a^n)(a^m) = a^{n+m}$

regel 2: $(a^n)(a^{-m}) = a^{n-m}$

regel 3: $a^0 = 1$ (als $a \neq 0$)

regel 4: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

regel 5: $(ab)^n = a^n b^n$

waarom?

Quiz: Vermenigvuldigen van exponenten??

- Commutatief: $n \cdot m = m \cdot n$
 - $a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n}$
- Associatief: $(n \cdot m) \cdot l = n \cdot (m \cdot l)$
 - $a^{(n \cdot m) \cdot l} = a^{n \cdot (m \cdot l)}$
- Is er een eenheid? $n \cdot 1 = 1 \cdot n$
 - $a^1 = ??$
- Bestaat inverse? Voor elke b en n , bestaat er een a , zdd
 - $a^n = b$??
 - Als ja, dan noem $a = b^{1/n}$

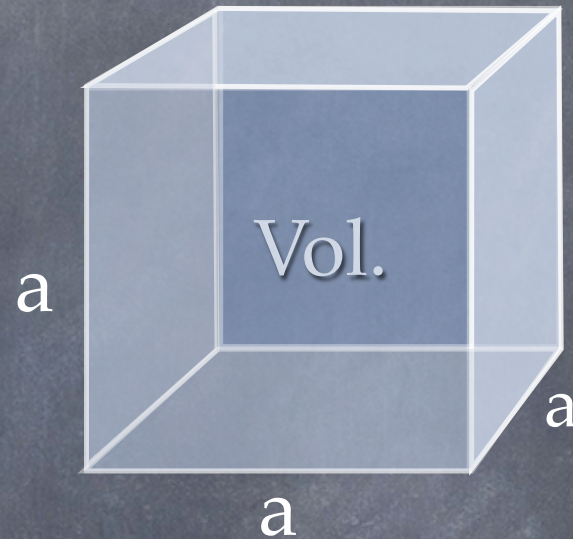
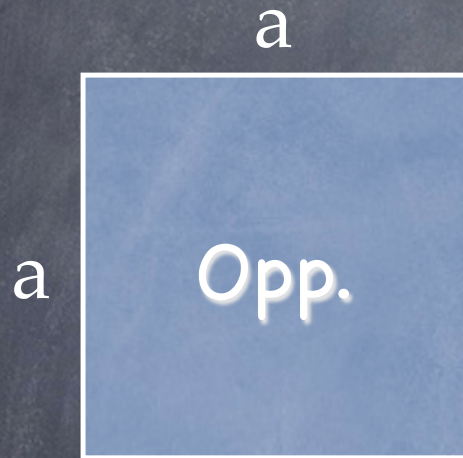
Quiz: Vermenigvuldigen van exponenten??

- Eenheid: $a^1 = a$
- Inverse?
 - $a^n = b = b^1 \leftarrow$ “omkering”, dan noem $a = b^{1/n}$

Voorbeelden:

- $a^2 = 16$, wat is a ?
 - $a = 4$. Dus schrijf $b^{1/2} = 4$
- $a^3 = 7$, wat is a ?
 - $a = 7^{1/3}$

Worteltrekken is het omgekeerde van
machtsverheffen en is een heel stuk lastiger



$$\text{Opp.} = 16 = a^2$$

... wat is a ?

$$a = 16^{1/2} = 4$$

$$\text{want } 4^2 = 16$$

$$\text{Vol.} = 27 = a^3$$

$$a = 27^{1/3} = 3$$

$$\text{want } 3^3 = 27$$

3^e machts wortel

Worteltrekken is het omgekeerde van machtsverheffen en is een heel stuk lastiger

Algemeen geldt

$$y = a^n \Leftrightarrow a = y^{1/n}$$

n-de machts wortel

Oppassen:

- $4^{1/2} = 2$ en $4^{1/2} = -2$

want $2^2 = 4$ en $(-2)^2 = 4$

- als $y < 0$ dan $\begin{cases} y^{1/n} < 0 & \text{als } n \text{ oneven is} \\ \emptyset & \text{als } n \text{ even is} \end{cases}$

$(-27)^{1/3} = -3$ want $(-3)(-3)(-3) = -27$

“principale waarde”

Worteltrekken is het omgekeerde van machtsverheffen en is een heel stuk lastiger

Algemeen geldt

$$y = a^n \Leftrightarrow a = \sqrt[n]{y}$$

n-de machts wortel

Oppassen:

“principale waarde”

- $\sqrt{4} = 2$ en $\sqrt{4} = -2$

want $2^2 = 4$ en $(-2)^2 = 4$

- als $y < 0$ dan $\begin{cases} \sqrt[n]{y} < 0 & \text{als } n \text{ oneven is} \\ \emptyset & \text{als } n \text{ even is} \end{cases}$

$\sqrt[3]{-27} = -3$ want $(-3)(-3)(-3) = -27$

Worteltrekken kan ook genoteerd worden met exponenten; worteltrekken wordt dan delen!

$$y = a^n \Leftrightarrow a = \sqrt[n]{y}$$

Merk op: $(\sqrt[n]{y})^n = (a)^n = a^n = y$

Nieuwe notatie $\sqrt[n]{y}$: $\boxed{\sqrt[n]{y} \equiv y^{1/n}}$

want $(y^{1/n})^n = y^{n(1/n)} = y^1 = y$

$(a^m)^n = a^{mn}$

Met $y^{n/m}$ bedoelen we $\boxed{y^{n/m} = (y^{1/m})^n = (\sqrt[m]{y})^n}$

bijv. $4^{3/2} = (4^{1/2})^3 = (\sqrt{4})^3 = (2)^3 = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$(25^{2/3})^{3/4} = 25^{(2/3)(3/4)} = 25^{1/2} = \sqrt{25} = 5$

De exponent notatie voor worteltrekken breidt machtsverheffen uit naar alle rationale getallen

Met $y^{n/m}$ bedoelen we

$$y^{n/m} = (y^{1/m})^n = (\sqrt[m]{y})^n$$

n/m is een rationaal getal (want n en m zijn geheel)

bijv. $n = 2, m = 3 \Rightarrow n / m = 2/3 = 0,6666\dots$

$$\text{dus, } 2^{0,6666\dots} = 2^{2/3} = (\sqrt[3]{2})^2$$

$n = 22, m = 7 \Rightarrow n / m = 22/7 = 3,1428571428\dots$

$$\text{dus, } 2^{3,1428571428\dots} = 2^{22/7} = (\sqrt[7]{2})^{22}$$

Hoe zit het met irrationele exponenten? bijv. $2^{\sqrt{2}}$

Machtsverheffen met rationale getallen is uit te breiden naar alle reële getallen

Hoe zit het met irrationele exponenten? bijv. $2^{\sqrt{2}}$

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\dots$$

$$\approx 1.41 = 141 / 100$$

$$\Rightarrow 2^{\sqrt{2}} \approx 2^{1.41} = 2^{141/100}$$

werkt alleen
voor positieve
getallen!

precieser: $\sqrt{2} \approx 1.414213 = 1414213 / 1000000$

$$\Rightarrow 2^{\sqrt{2}} \approx 2^{1.414213} = 2^{1414213/1000000}$$

etc.... $2^{\sqrt{2}}$ is de limiet van dit proces

per definitie

De tot nog toe bepaalde algebra-regels zijn in zes regels samen te vatten

$$a+b = b+a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x$$