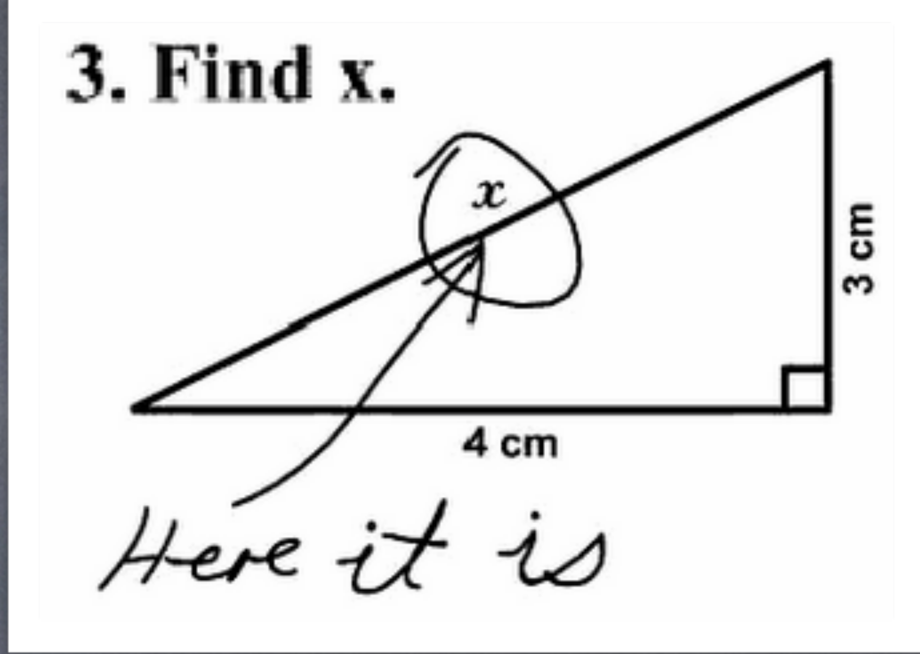


Wiskunde Module

Basisprogramma Psychologische Methodenleer

Alexander Ly (Raoul Grasman)

We behandelen voornamelijk algebra en differentiëren van functies

vr	algebra: rekenregels
ma	functies, 1e & 2e orde polynomen
wo	afgeleiden, differentiëren
vr	differentiëren en integreren
ma	matrix algebra (?)

Programma vandaag

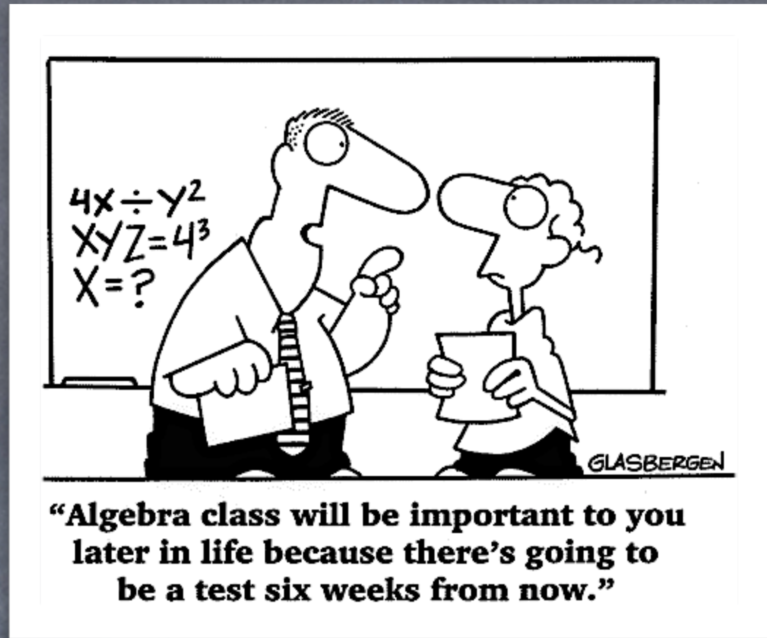
- Samenvatting: algebra
- Functies
- Gebruik van functies: Het "oplossen" van vergelijkingen
- Exponentiele functies
- Continuiteit
- Inverteren van functies
- Logaritme

Hoorcollege vs werkcollege

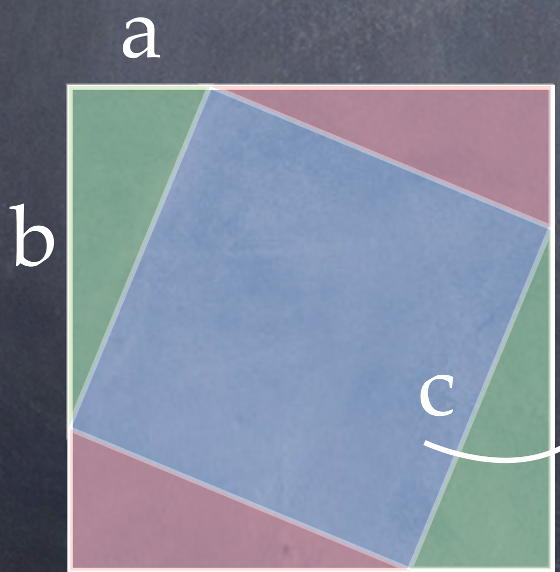
Wiskunde combineert inzicht en regels:

- Regels veralgemeniseren bepaalde ideeen (Hoorcolleges + diagnostische testjes)
- Je leert de regels door deze te gebruiken (Werkcollege)
- Uiteindelijk gebruik je wiskunde als een taal om je intuitie te vertalen in een model.

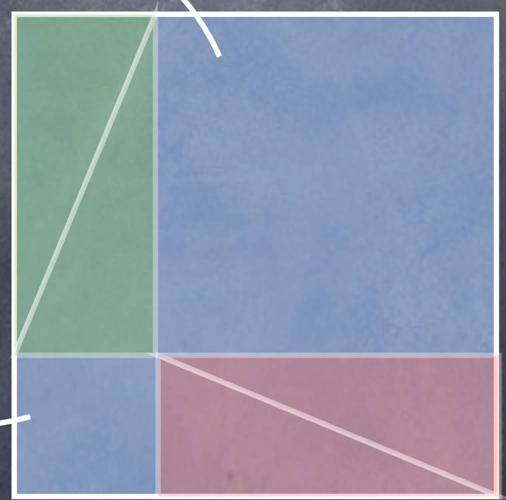
Algebra



"Algebra class will be important to you later in life because there's going to be a test six weeks from now."



$$c^2 = a^2 + b^2$$



Optellen

- Associatief:
  - $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Identiteit: Er is een nul element
  - $a + 0 = a$ en $0 + a = a$
- Inverse: Voor elke a is er een b
  - $a + b = 0$ en $b + a = 0$
  - En we noemen $b = -a$
- Commutatief
  - $a + b = b + a$

Vermenigvuldigen

- Associatief:
  - $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Eenheid: Er is een 1 zodat
  - $a \cdot 1 = a$ en $1 \cdot a = a$
- Inverse: Voor elke $a \neq 0$, is er een b zodat
  - $a \cdot b = 1$ en $b \cdot a = 1$
  - En we noemen $b = 1/a$
- Commutatief
  - $a \cdot b = b \cdot a$

Algebra truck

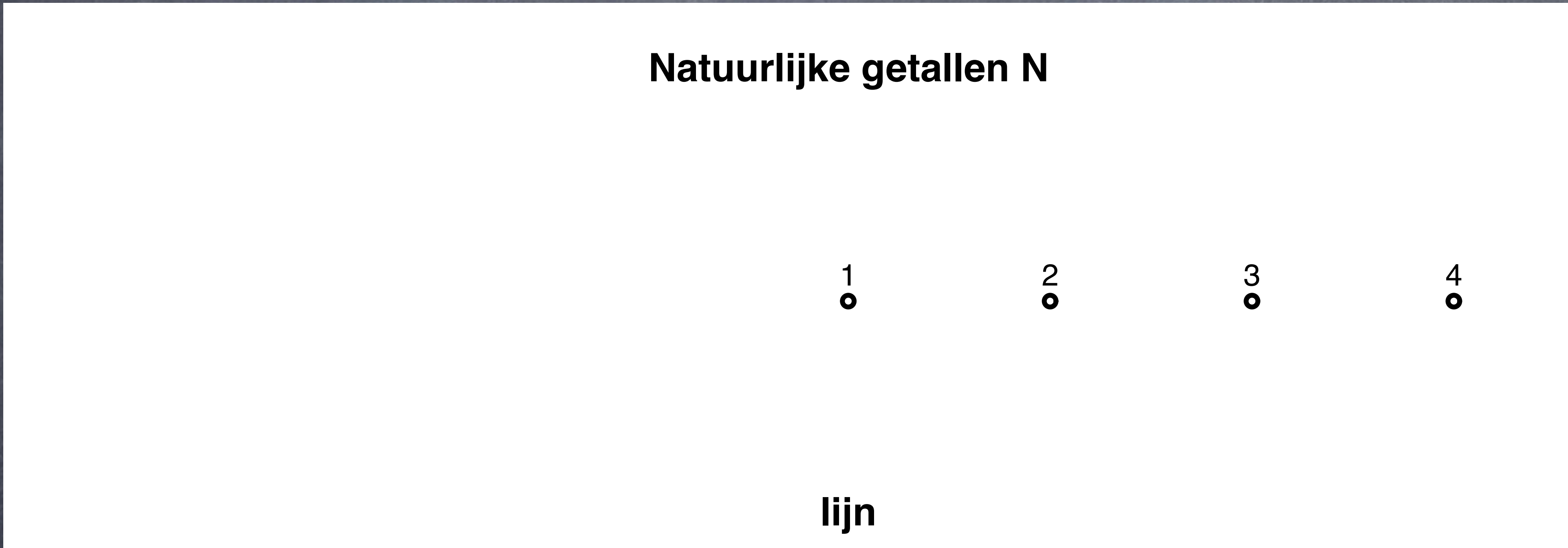
- Nul element:
  - $a - a = 0$
  - $a = a + (b - b) = a + b - b$
  - $b + a - b = a + \cancel{b} - \cancel{b} = a$
- Identiteit:
  - Als $b \neq 0$
  - $a = a \cdot 1 = a \cdot b / b = a \cdot b \cdot (1/b)$

$$\frac{a \cdot \cancel{b}}{\cancel{b}} = a$$

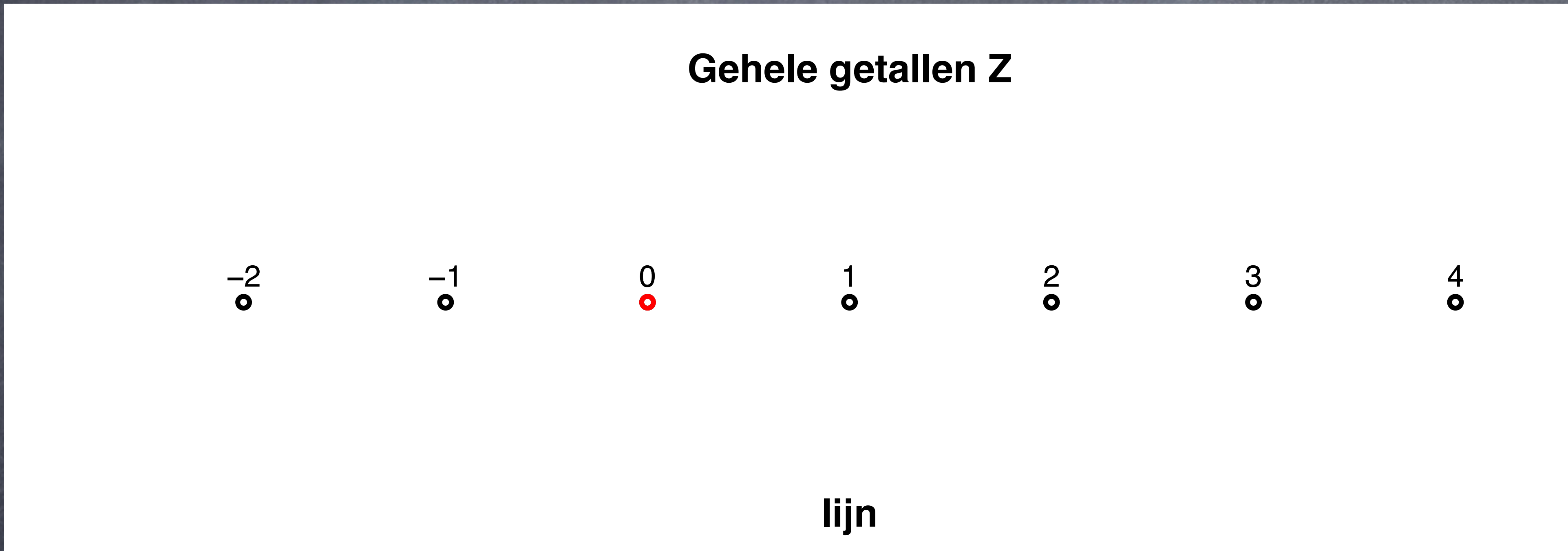
Algebra truck

- Nul element (Optellen):
  - $a^n a^m = a^{n+m}$
  - $a^n a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$
- Identiteit:
  - Als $y = a^n$, dan per definite
    - $a = {}^n\sqrt{y}$
  - $y = a^n \Leftrightarrow {}^n\sqrt{y} = a = (a^n)^{1/n} = y^{1/n}$

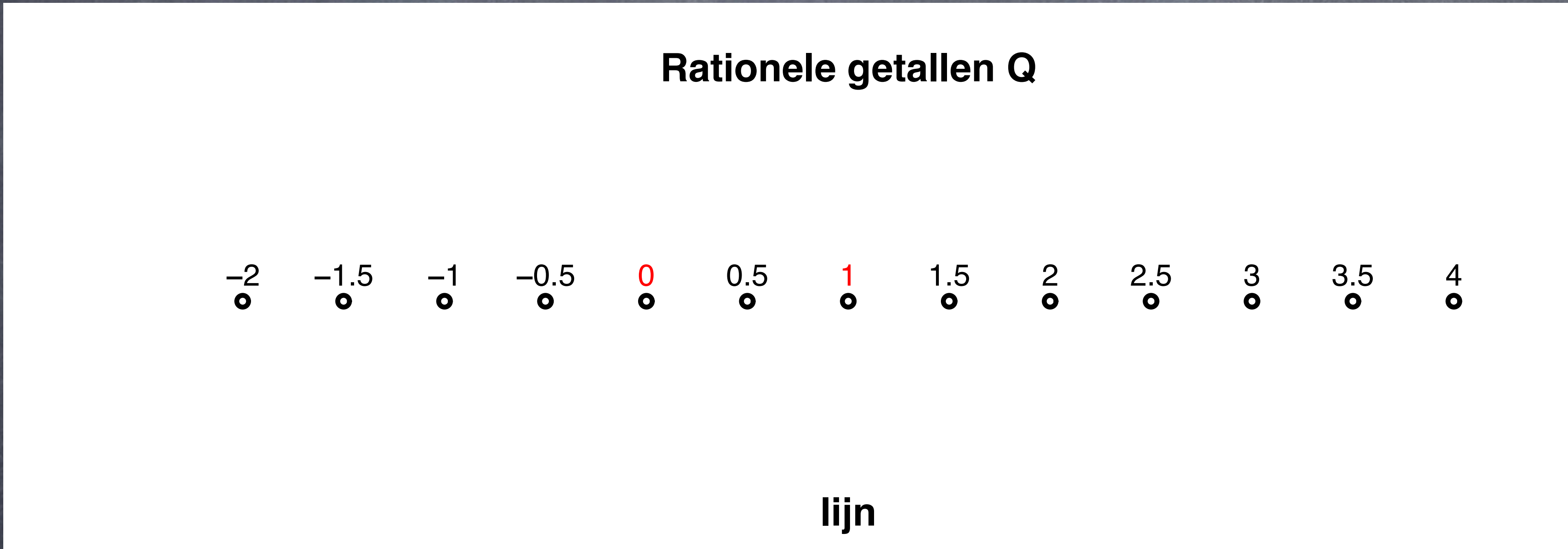
Natuurlijke getallen: Getallen op basis van optellen



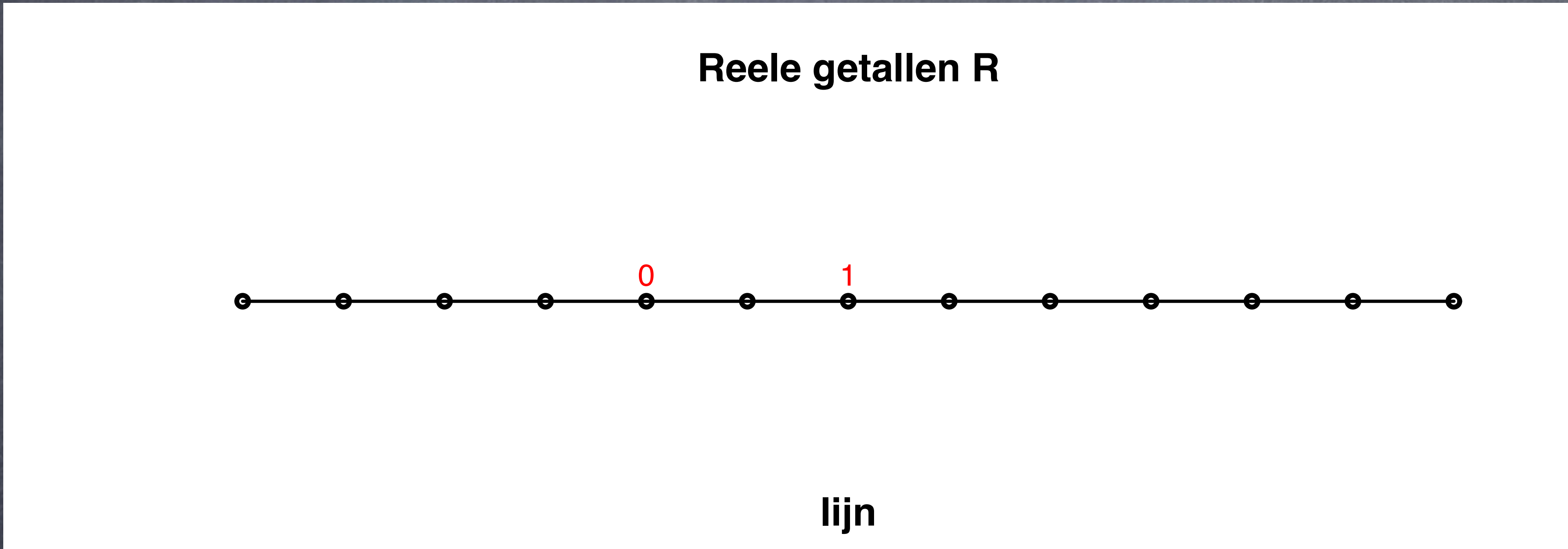
Gehele getallen: Verkregen van “inverse” optellen



Rationele getallen: “Inverse” vermenigvuldigen



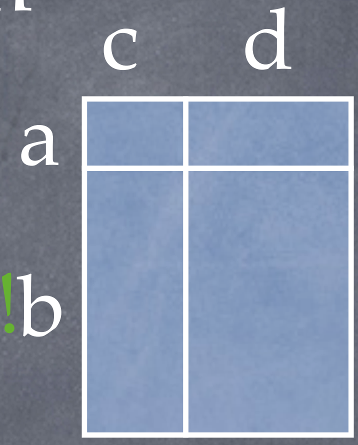
Reeële getallen: Gaten vullen



Combinatie optellen en vermenigvuldigen

- Distributief:
  - $a\,(b + c) = ab + ac$
  - $(a + b)\,c = ac + bc$
- Voorbeeld:
  - $3\,(4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 12 + 15$
  - $3\,(4 + 5) = 3 \cdot 9 = 27$

Distributie regel toegepast op producten



$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

d.w.z. te onthouden!!

(niet 'vreemde')

Een lijstje merkwaardige producten:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + (2+3)x + 2 \cdot 3$$

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$$

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

$$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$$

Programma vandaag

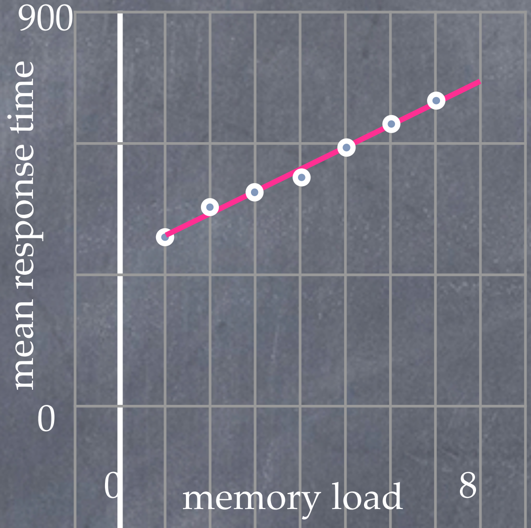
- Samenvatting: algebra
- Functies
- Gebruik van functies: Het “oplossen” van vergelijkingen
- Exponentiele functies
- Continuiteit
- Inverteren van functies
- Logaritme

Functies zijn fundamenteel voor het beschrijven van relaties in empirische data

Sternberg ('64):

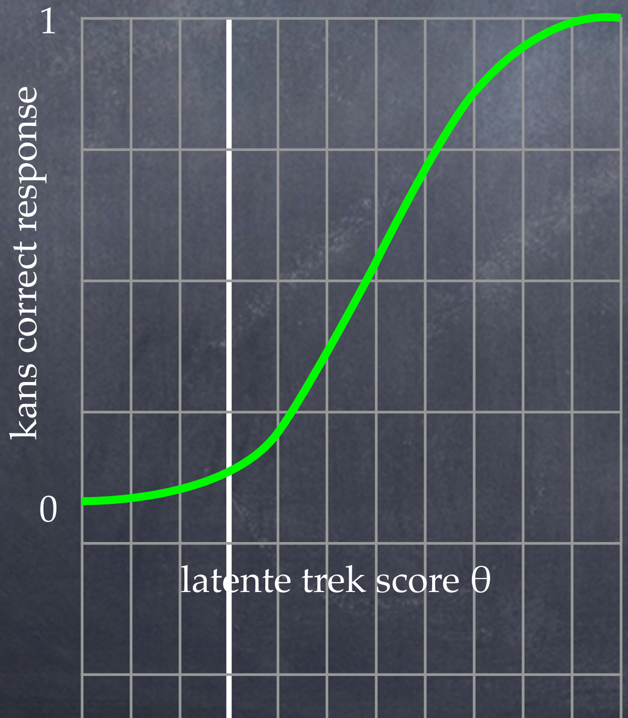
$$RT \approx 38 \cdot N + 397$$

N is # items in geheugen



IRT

$$\frac{e^{a(\theta-b)}}{1 + e^{a(\theta-b)}}$$

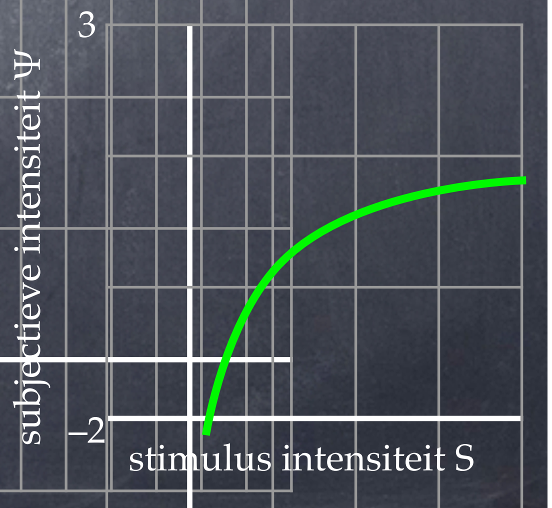


Wet van Weber

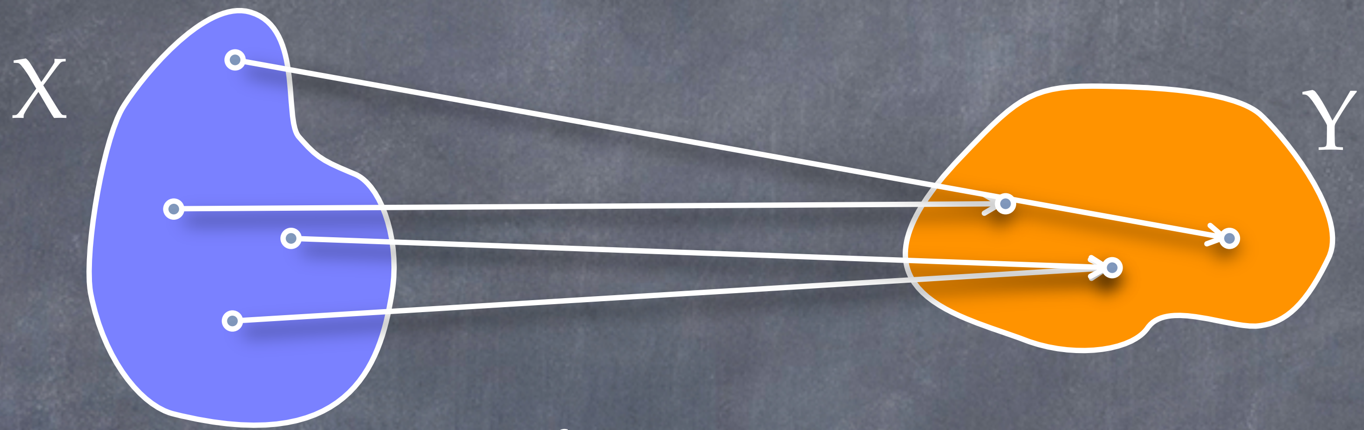
$$\Delta\Psi = k\frac{\Delta S}{S}$$

$$\Downarrow$$

$$\Psi = k \cdot \log(S)$$



Formeel zijn functies afbeeldingen van de ene verzameling op de andere

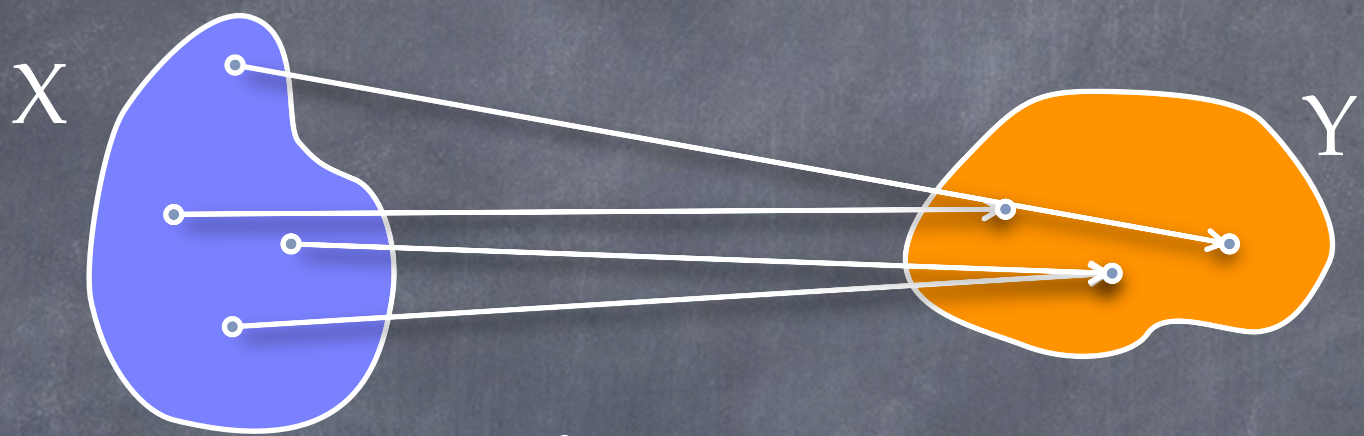


f: X -> Y

X, Y collectie getallen

In statistiek bevat X 'subjects' of dingen, en Y getallen

Formeel zijn functies afbeeldingen van de ene verzameling op de andere



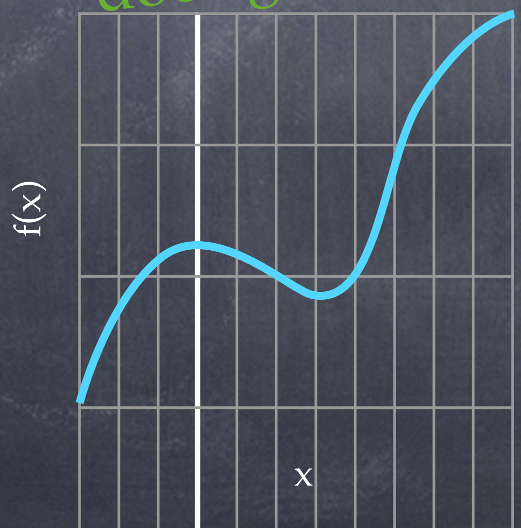
f: X -> Y

voorbeelden:

functie o.b.v. tabel

x	f(x)
2	2
1	14
13	12
25	6
12	100
6	5

functie gegeven door grafiek



gegeven door functievoorschrift

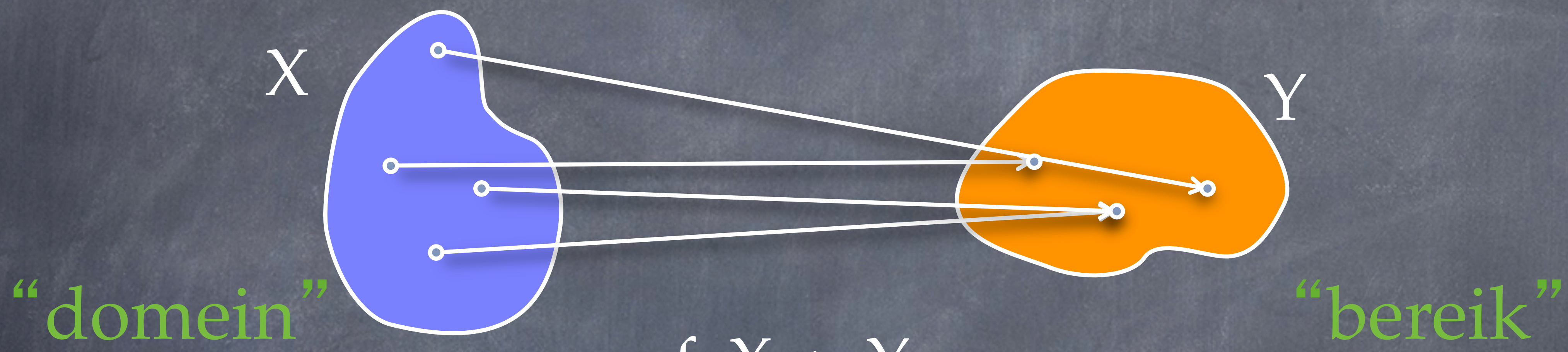
$$f(x) = x^2 - 3x$$

gegeven door meetprocedure

X: Nederlanders

Y: Schoenmaat

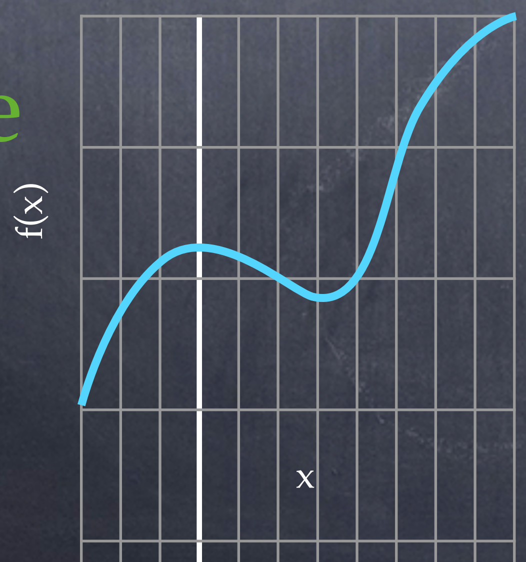
Formeel zijn functies afbeeldingen van de ene verzameling op de andere



f: X -> Y

Eis: Ieder element uit X mapt op één element uit Y

functie



geen functie

Er zijn een aantal belangrijke functies die als bouwstenen fungeren in andere functies

We bespreken vijf elementaire functies:

- polynomen (veeltermen) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$
- rationale functies $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 + x - 4}$
- absolute waarde functie $f(x) = |x|$
- exponentiële functie $f(x) = a^x$
- faculteit functie $f(n) = n!$

De faculteit functie groeit sneller dan iedere exponentiele functie

wordt veel gebruikt in de statistiek

de faculteit functie is gedefinieerd als

alléén gehele getallen! (gamma functie $\Gamma(x)$)

$$n! = n\cdot(n\text{-}1)\cdot(n\text{-}2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1$$

afspraak: $0! = 1$

voorb.

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2\cdot1 = 2$

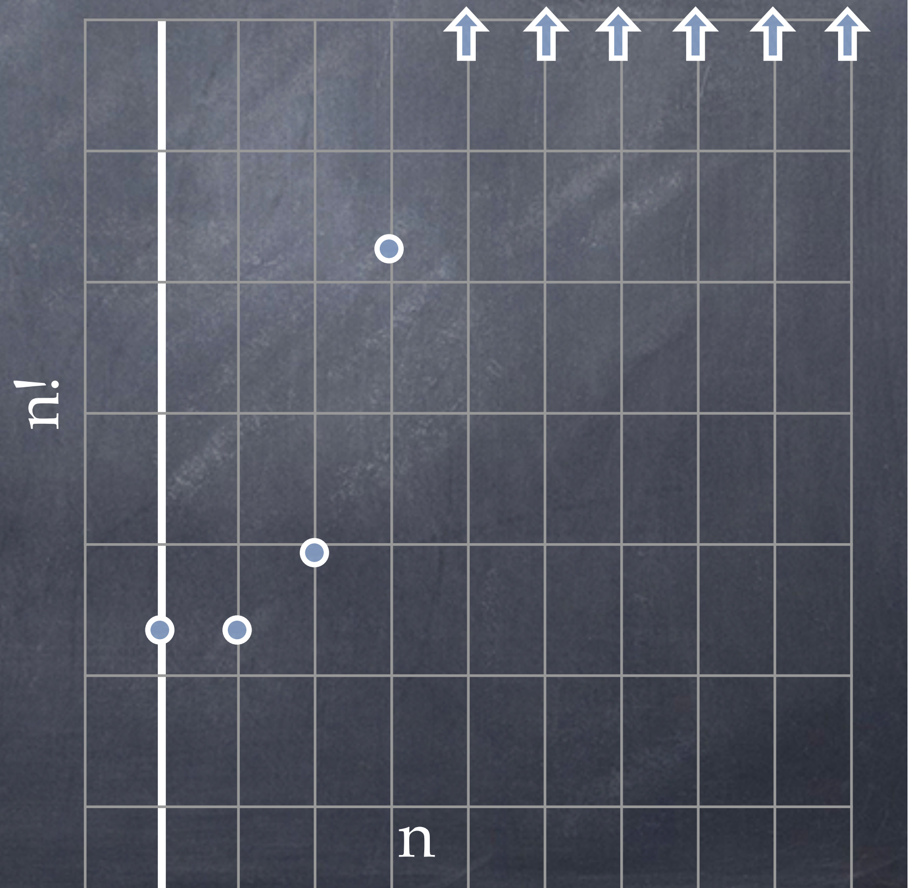
$3! = 3\cdot2\cdot1 = 6$

$4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$

$5! = 5\cdot4! = 120$

$6! = 6\cdot5! = 720$

$n! = n\cdot(n-1)!$



Er zijn een aantal belangrijke functies die als bouwstenen fungeren in andere functies

We bespreken vijf elementaire functies:

- polynomen (veeltermen) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$
- rationale functies $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 + x - 4}$
- absolute waarde functie $f(x) = |x|$
- exponentiële functie $f(x) = a^x$
- faculteit functie $f(n) = n!$

De graad van een polynoom beperkt het aantal doorsnijdingen met de x-as (d.w.z. nulpunten)

Polynomen zijn functies van de vorm

n (= 0, 1, 2, 3, ...) is de "graad"

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

$c_m x^m$ zijn termen

c_m zijn coefficienten

voorb.:

2e graads polynoom (i.c. drieterm)

$$f(x) = 3x^2 + 4x + 1$$

coefficienten: 3, 4, 1

5e graads polynoom (i.c. vierterm)

$$f(x) = 3x^5 - 4x^2 + x - 4$$

coefficienten: 3, 0, 0, –4, 1, –4

Een som van producten heet een veelterm of <u>polynoom</u>

$$5ax^2 - 2bx + 3$$

termen (enkelterm / monoom)

de grootste exponenent bepaalt de <u>graad</u>

bijv. $3x^2 + 6x - 10$ — 2^e-graads polynoom

$3x - 10$ — 1^e-graads polynoom

$3x^3$ — 3^e-graads polynoom

Quiz:

bijv.	$3x^2 + 6x - 10$	2e-graads polynoom
	$3x - 10$	1e-graads polynoom
	$3x^3$	3e-graads polynoom
	-10	Polynoom ???

De graad van een polynoom beperkt het aantal doorsnijdingen met de x-as (d.w.z. nulpunten)

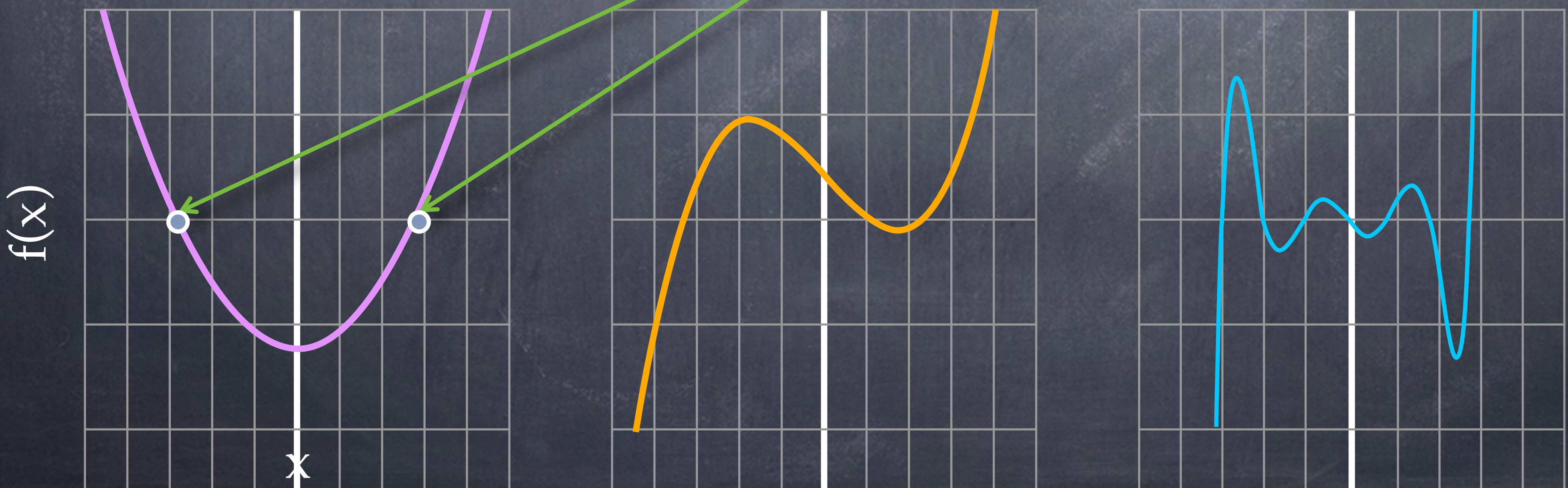
Polynomen zijn functies van de vorm

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

voorb.

nulpunten = n

$\frac{3}{8}x^2 - 3$ $\qquad$ $\frac{1}{8}x^3 - 1\frac{1}{8}x + 1$ $\qquad$ $\frac{x^7}{32} - \frac{7x^5}{16} + \frac{49x^3}{32} - \frac{9x}{8}$



Lineaire en kwadratische functies

Polynoom van graad 1

Polynoom van graad 2

"Just a darn minute! — Yesterday you said that X equals **two**!"

Een lineaire functie wordt bepaald door z'n intercept en richtingscoefficiënt

Een lineaire functie heeft de vorm

$f(x) = ax + b$ of $y = ax + b$

richtingscoeffiënt intercept

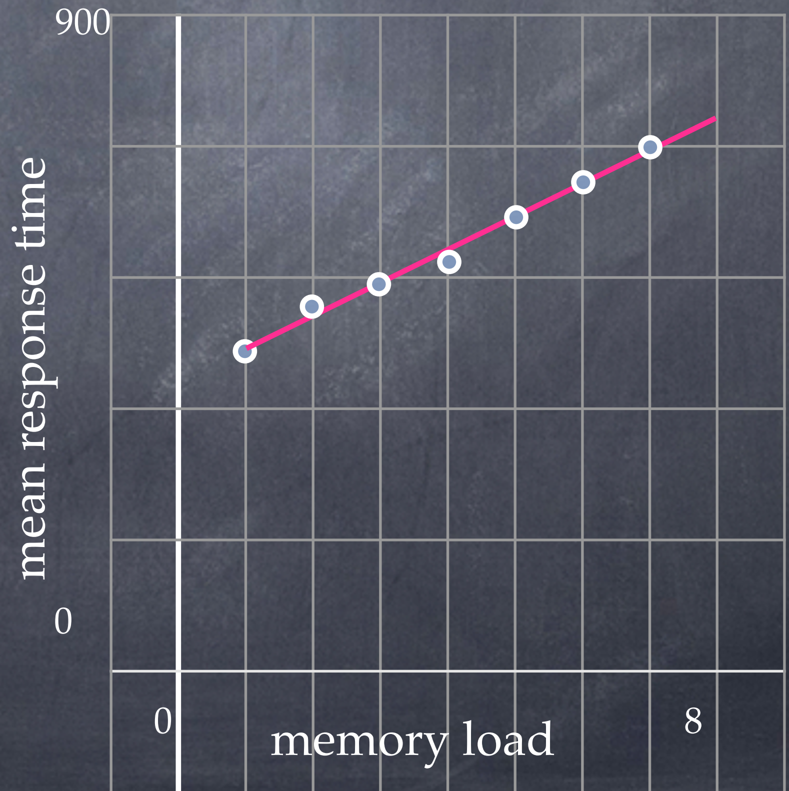
Sternberg ('64):

$RT \approx 38 \cdot N + 397$

N is # items in geheugen

intercept = b = 397

rico = a = 38



De richtingscoefficiënt meet hoe snel een lineaire functie stijgt

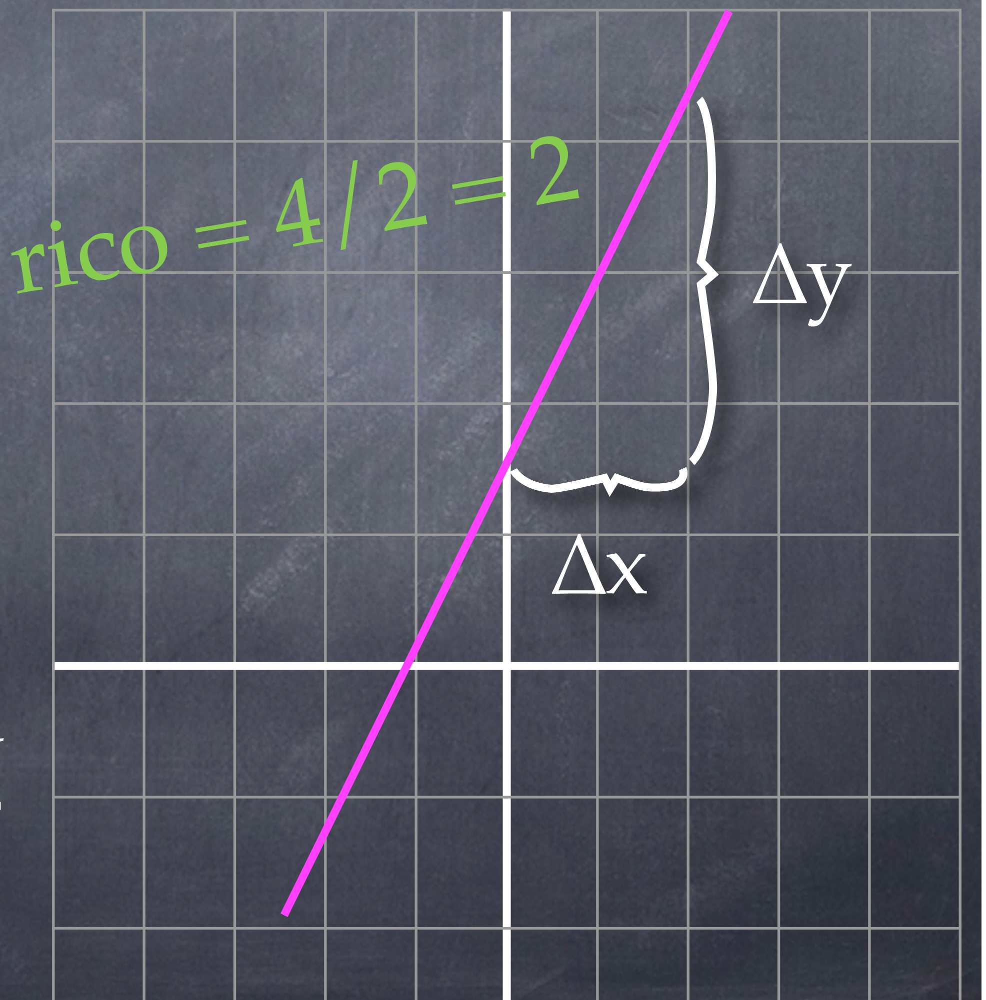
$$f(x) = ax + b \qquad \text{of } y = ax + b$$

rico meet stijlheid

hoeveel veranderd y
met één stap in x?

ratio verandering in y
t.o.v. verandering in x

$$\text{rico} = \frac{\text{verandering y}}{\text{verandering x}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



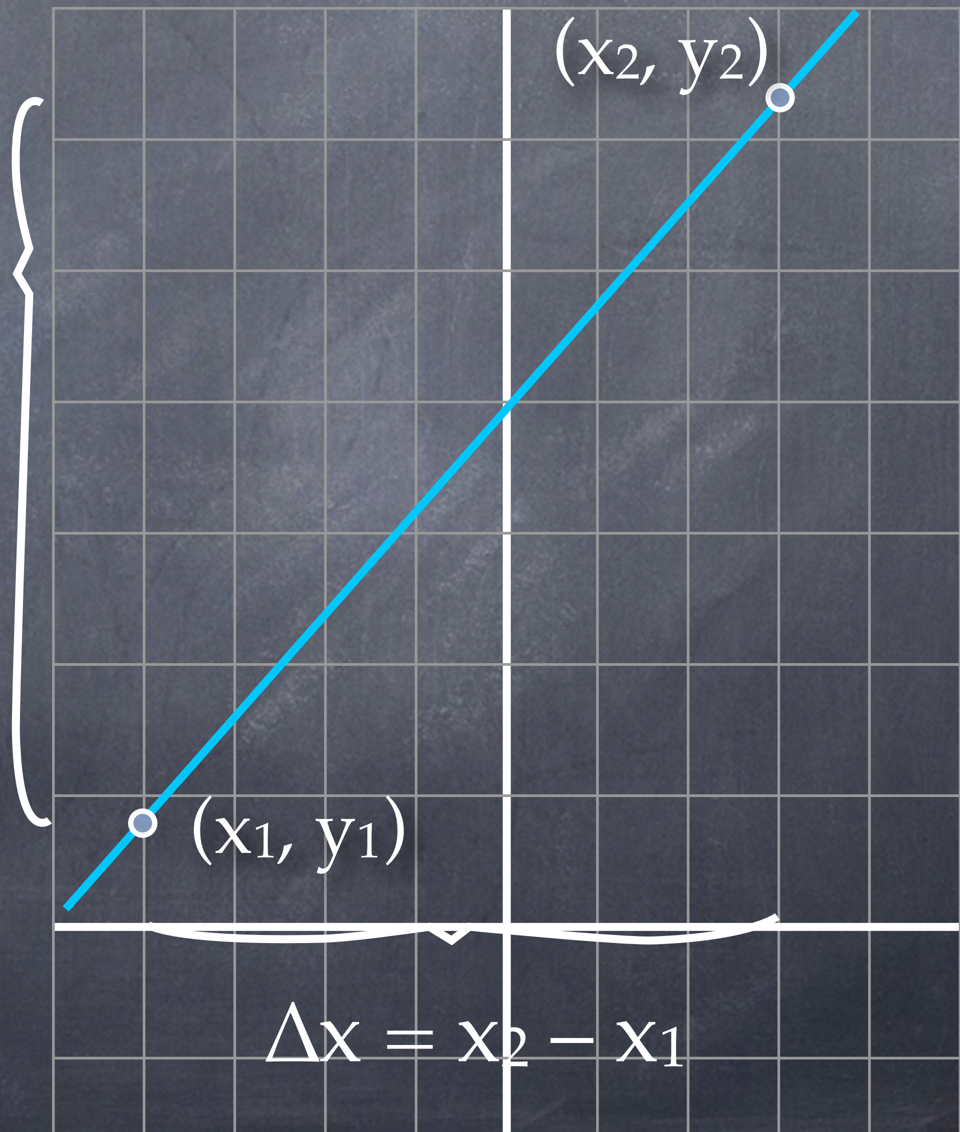
De richtingscoefficiënt kan berekend worden a.d.h. van twee willekeurige punten op de lijn

$f(x) = ax + b$ of $y = ax + b$

$$\text{rico} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\therefore\ a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$\Delta y = y_2 - y_1$



$\Delta x = x_2 - x_1$

voorb.

lijn door (-4,-2) en (3,6)

$\Rightarrow x_1 = -4,\ y_1 = -2$

$x_2 = 3,\ y_2 = 6$

$$\Rightarrow a = \frac{6 - (-2)}{3 - (-4)} = 8/7$$

De richtingscoefficiënt kan berekend worden a.d.h. van twee willekeurige punten op de lijn

$$f(x) = ax + b \qquad \text{of } y = ax + b$$

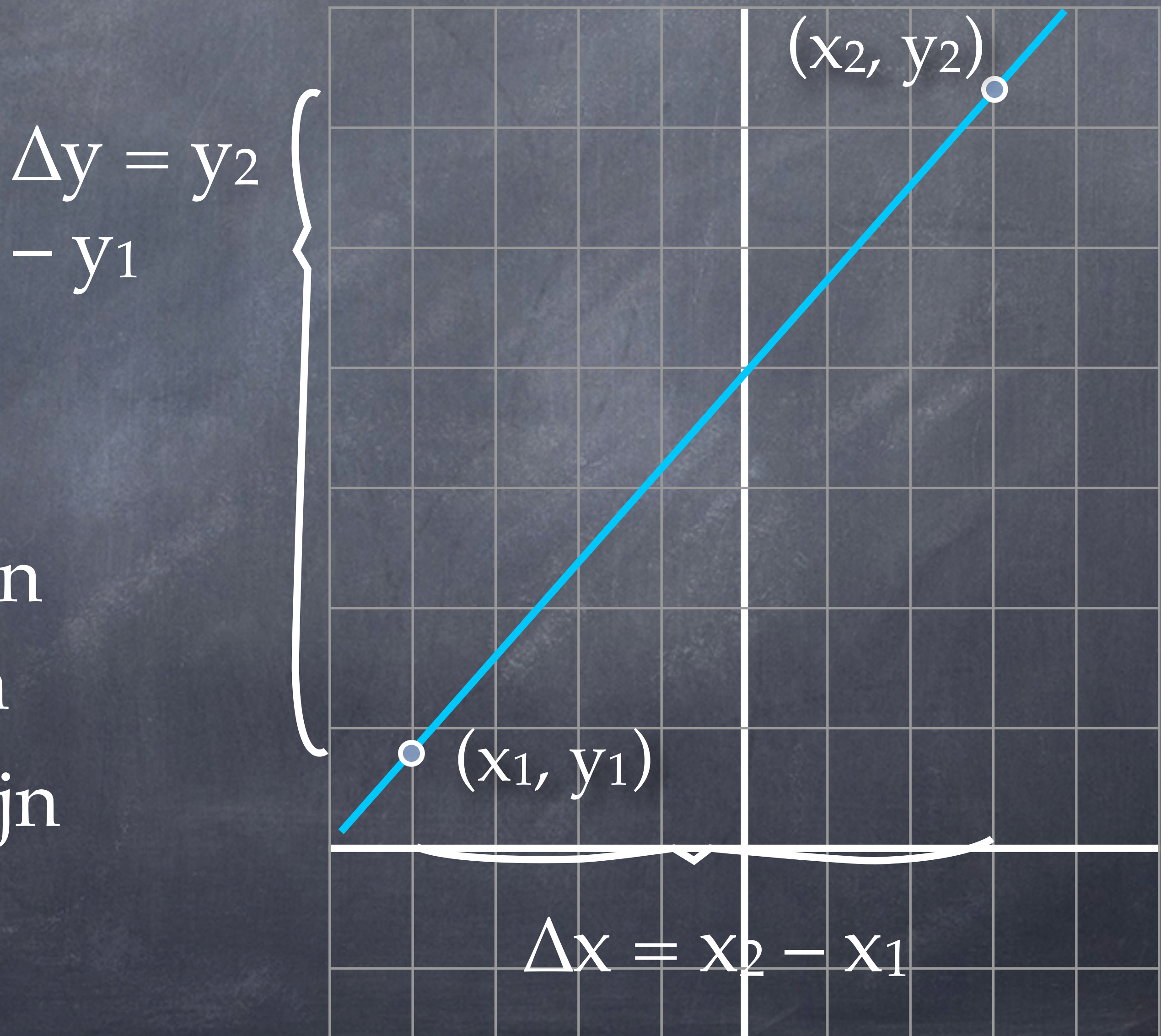
$$\text{rico} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\therefore\ a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$a > 0 \Rightarrow$ stijgende lijn

$a < 0 \Rightarrow$ dalende lijn

$a = 0 \Rightarrow$ constante lijn



Programma vandaag

- Samenvatting: algebra
- Functies
- Gebruik van functies: Het "oplossen" van vergelijkingen
- Exponentiele functies
- Continuiteit
- Inverteren van functies
- Logaritme

Punt bepaling voor het vak

- Opdracht, “x” [1/3] (voor R en statistiek)
- Tentamen, “y” [2/3]
- Je eind punt z is gegeven door
  - $z := f(x, y) = 1/3 \cdot x + 2/3 \cdot y$
- Slaagt als $z \geqq 6$ en $\min(x, y) > 5{,}5$
- Stel je hebt een x=5.6 gehaald voor je opdracht

“Voorwaarts” gebruik van een functie f

- Eind score z, gegeven x=5.6:
  - $z := f(x=5.6, y) = 1/3 \cdot 5.6 + 2/3 \cdot y = 2/3 \cdot y + 5.6/3$
- Omdat het eind punt z van het tentamen afhangt moet de docent wachten tot na het tentamen om z te berekenen.
- Echter…

“Inverse” gebruik van een functie f

- Eind score z, gegeven x=5.6:
  - $z := f(x=5.6, y) = 1/3 \cdot 5.6 + 2/3 \cdot y = 2/3 \cdot y + 5.6/3$
- De student heeft een eind score z=8 nodig om “cum laude” te slagen
- De student inverteert f om uit te vogelen wat ze nodig heeft voor het tentamen
- Invullen f(x=5.6, y)=8 en de vergelijking oplossen

“Inverse” gebruik van een functie f

- Invullen $f(x=5.6, y)=8$ en de vergelijking oplossen
  - $8=2/3\cdot y + 5.6/3$
  - $2/3y = 92/15 \Rightarrow y=9.2$
- $2/3y - 92/15 = 0.$
- Veel voorkomende vorm, als je het voor nul op kunt lossen, kun je het voor getallen oplossen.
- “Nulpunten van polynomen”

“Inverteren” van functies

- Het inverteren van functies ligt ten grondslag van de statistiek
- Volgens item response theory (IRT) modellen construeren we examens, zodanig dat de “goede” studenten slagen en de “slechte” studenten zakken
- In de praktijk weten we niet welke studente “goed” en welke “slecht” zijn. Op basis van de uiteindelijke scores geven we ze een label “goede” of “slechte” student
- Dit is de context van oplossen en factoriseren van vergelijkingen

Gebruik van functies

- Gegeven een specifiek relatie (functie) f: Y -> Z
  - $f(y) = z$
- Moet jet het volgende kunnen:
  - Gegeven y, bereken z [voorwaarts]
  - Gegeven uitkomst z, vindt de bijbehorende y [inverteer]

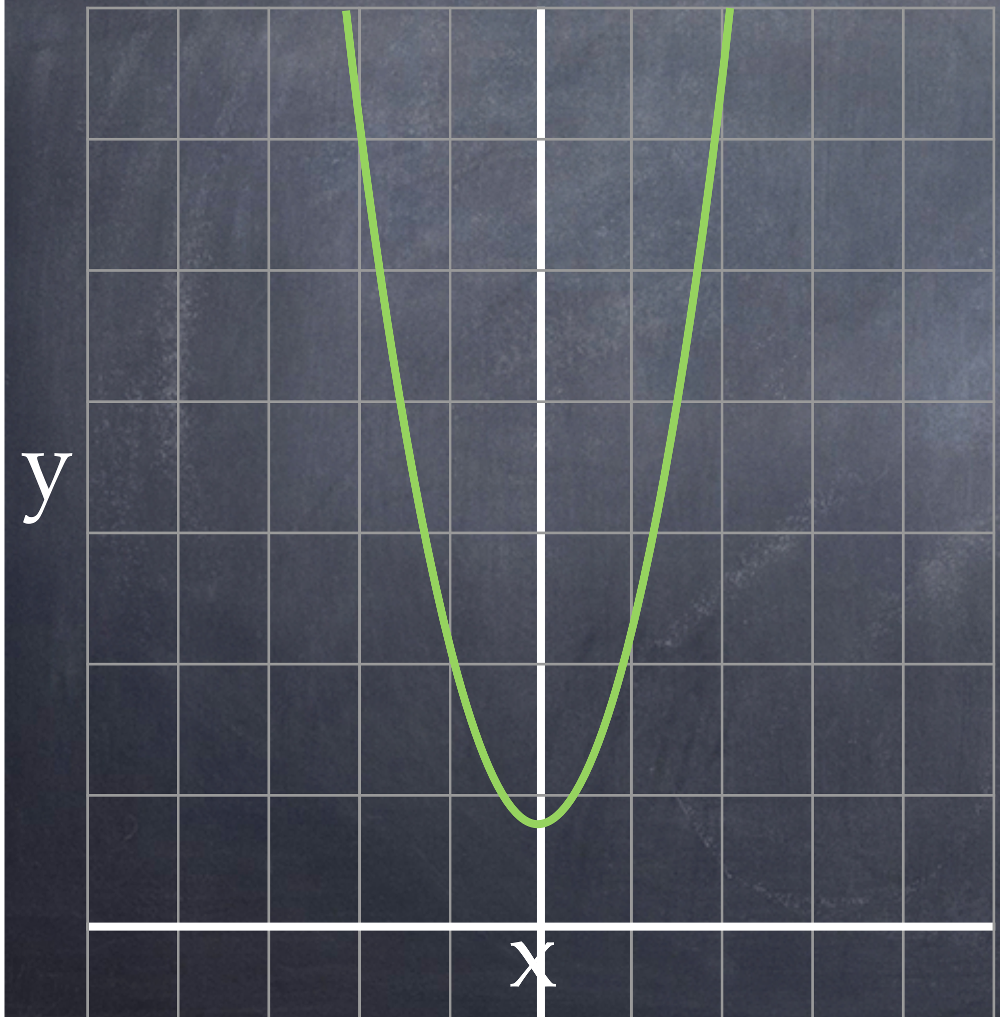
Er zijn een aantal belangrijke functies die als bouwstenen fungeren in andere functies

We bespreken vijf elementaire functies:

- polynomen (veeltermen) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$
- rationale functies $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 + x - 4}$
- absolute waarde functie $f(x) = |x|$
- exponentiële functie $f(x) = a^x$
- faculteit functie $f(n) = n!$

Kwadratische functies zijn bol of hol, afhankelijk van de coefficient van de 2e graads term

$f(x) = ax^2 + bx + c$ of $y = ax^2 + bx + c$



komen zéér veel voor in toepassingen*

als $a > 0$ dan convex

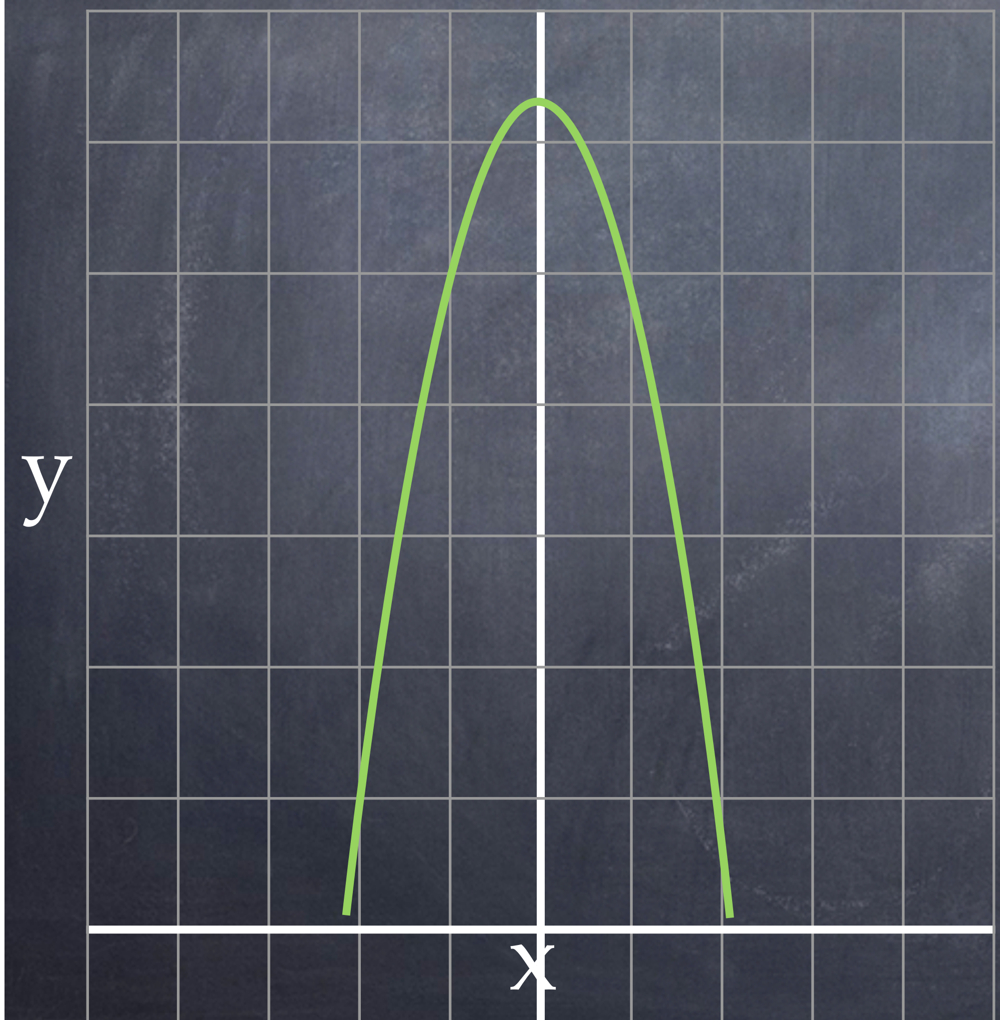
voorb. $y = 2x^2 - 2$

$a = 2, b = 0, c = -2$

*meestal in benaderingen van andere functies

Kwadratische functies zijn bol of hol, afhankelijk van de coefficient van de 2e graads term

$f(x) = ax^2 + bx + c$ of $y = ax^2 + bx + c$



komen zéér veel voor in toepassingen*

als $a < 0$ dan concaaf

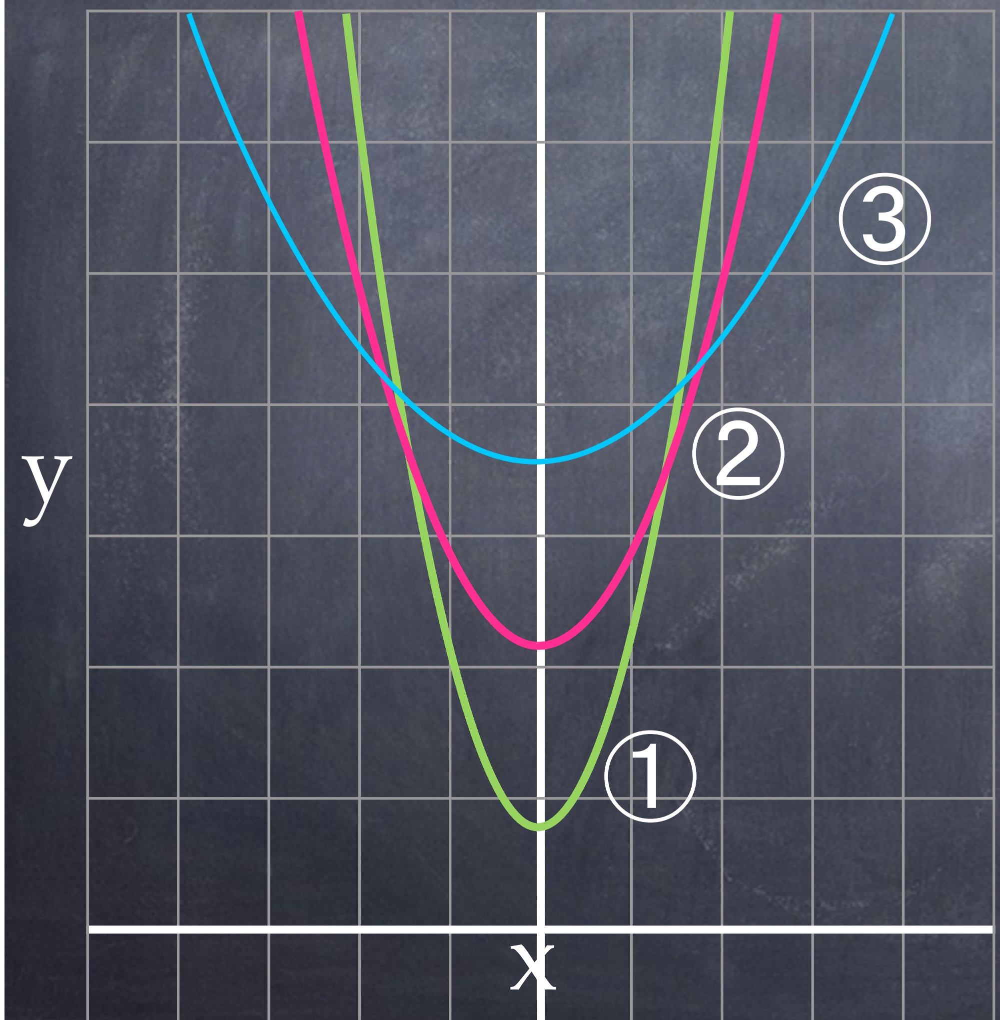
voorb. $y = -2x^2 + 6$

$a = -2, b = 0, c = 6$

*meestal in benaderingen van andere functies

Kwadratische functies hebben 0, 1, of twee snijpunten met de x-as (nulpunten)

$f(x) = ax^2 + bx + c$ of $y = ax^2 + bx + c$



voorb.

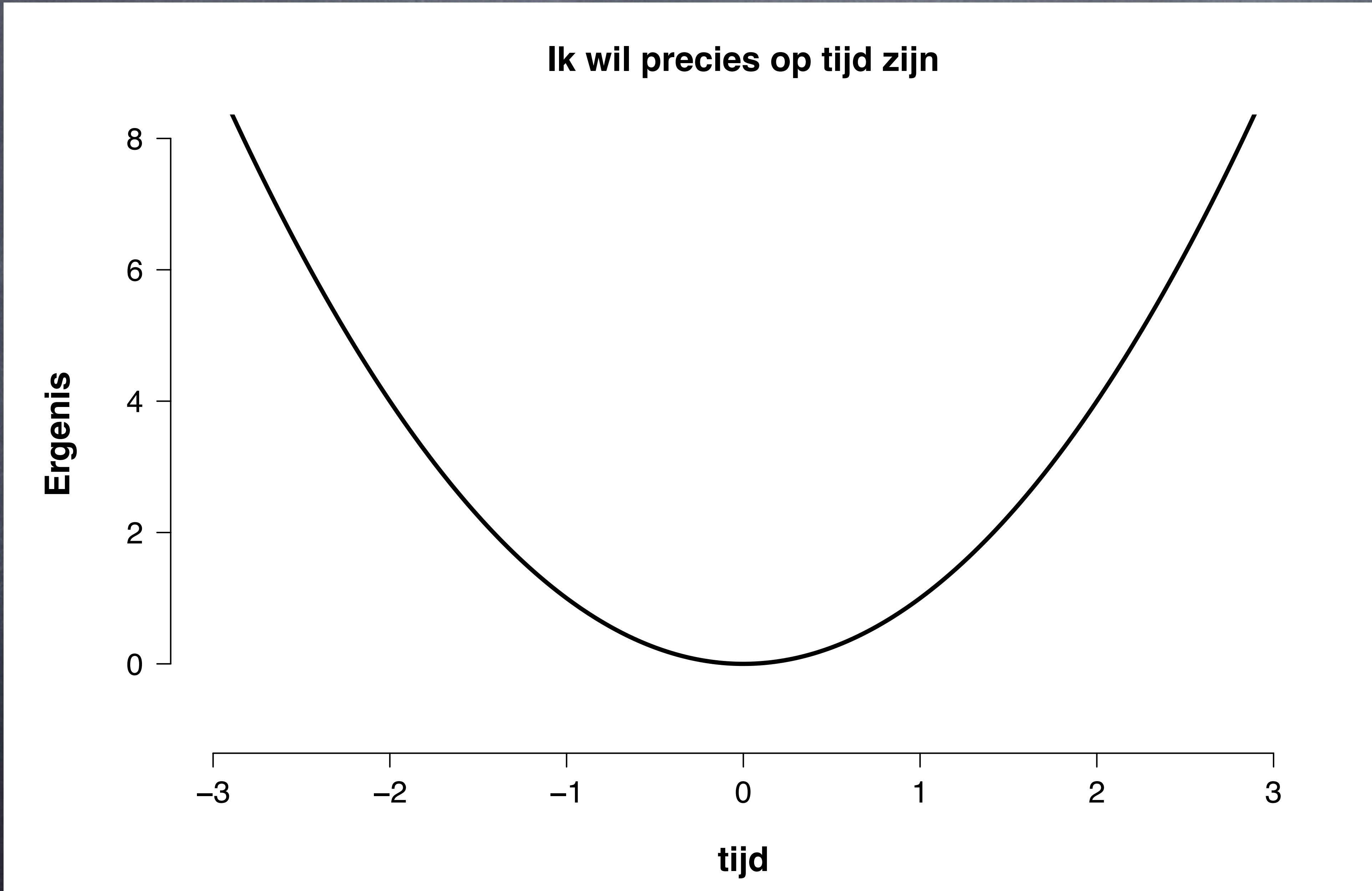
① $y = 2x^2 - 2$ 2 n.p.

② $y = x^2$ 1 n.p.

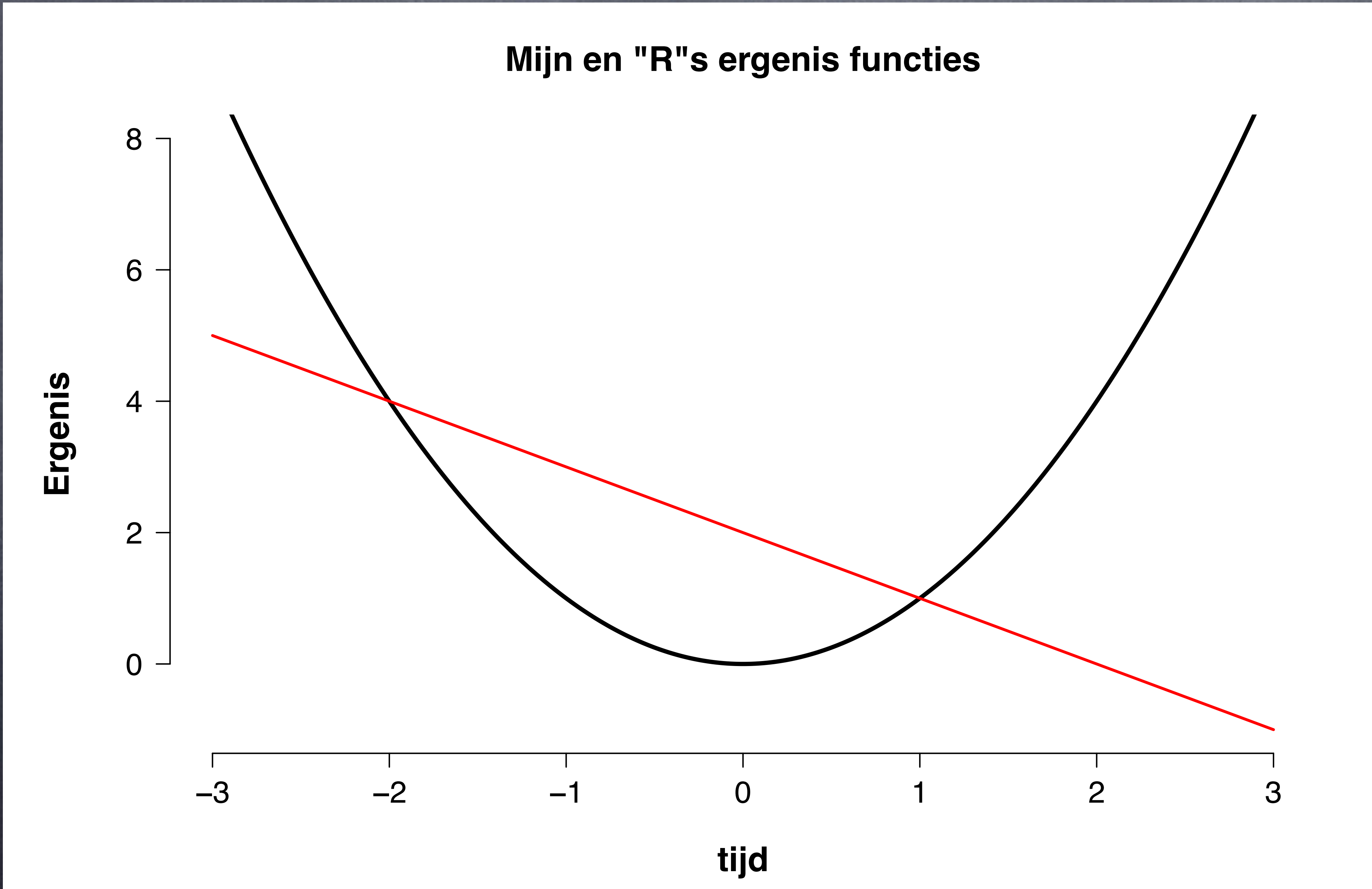
③ $y = \frac{1}{3}x^2 + 2$ 0 n.p.

wordt bepaald door a,b,c, maar hoe?

Mijn afspraken met "R"



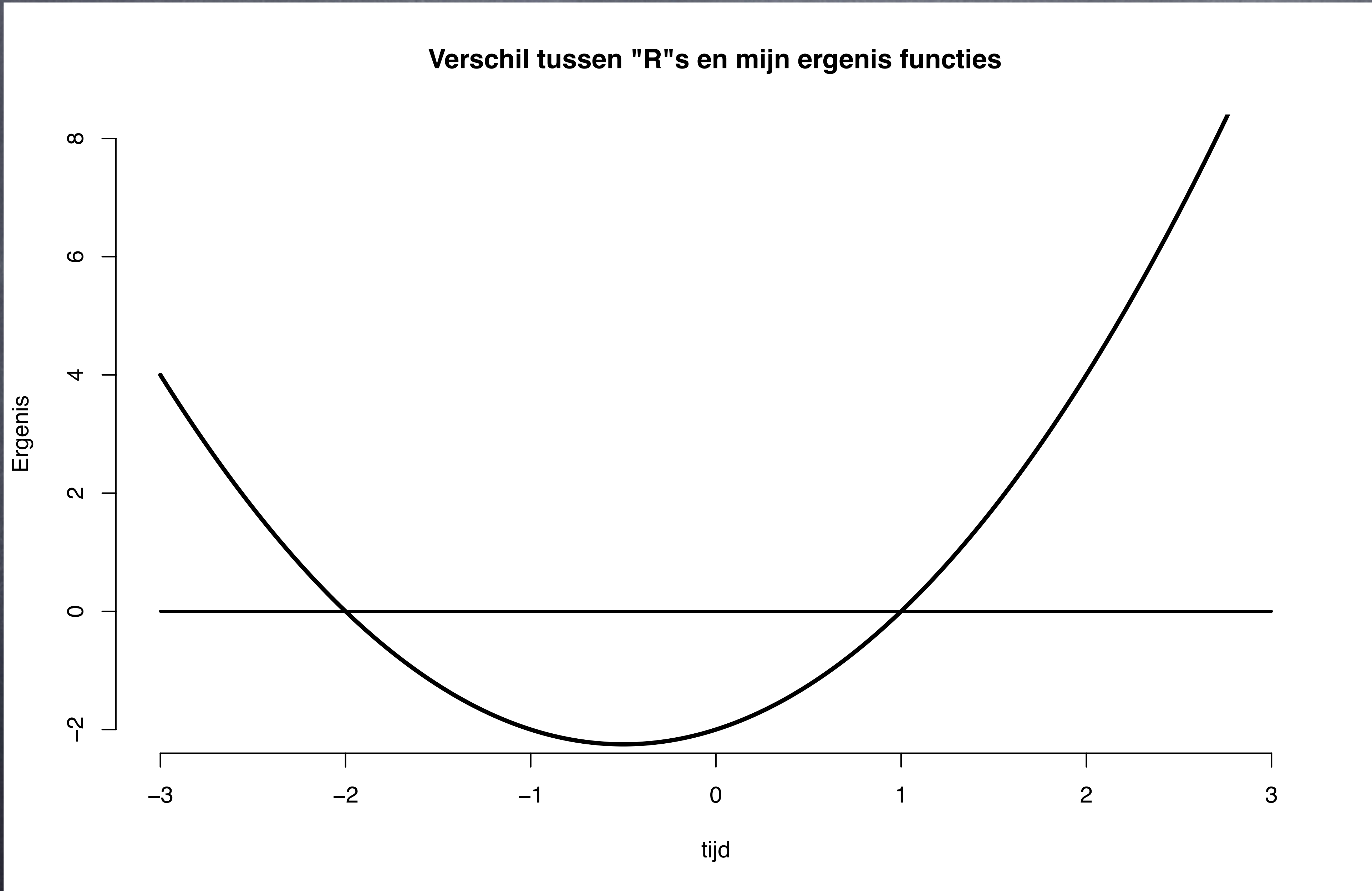
Mijn afspraken met "R"



Mijn afspraken met “R”

- Mijn ergenis: x^2
- “R”s ergenis: $-x+2$
- Oplossen van $x^2=-x+2$
- $x^2+x-2=0$
- Factoriseer $x^2+x-2 = (x+1)(x-2)=0$
- Om onze gemoedstoestand gelijk te houden kan ik best 2 minuten ervoor komen of 1 minuut nadat we afgesproken hebben

Mijn afspraken met "R"



De graad van een polynoom beperkt het aantal doorsnijdingen met de x-as (d.w.z. nulpunten)

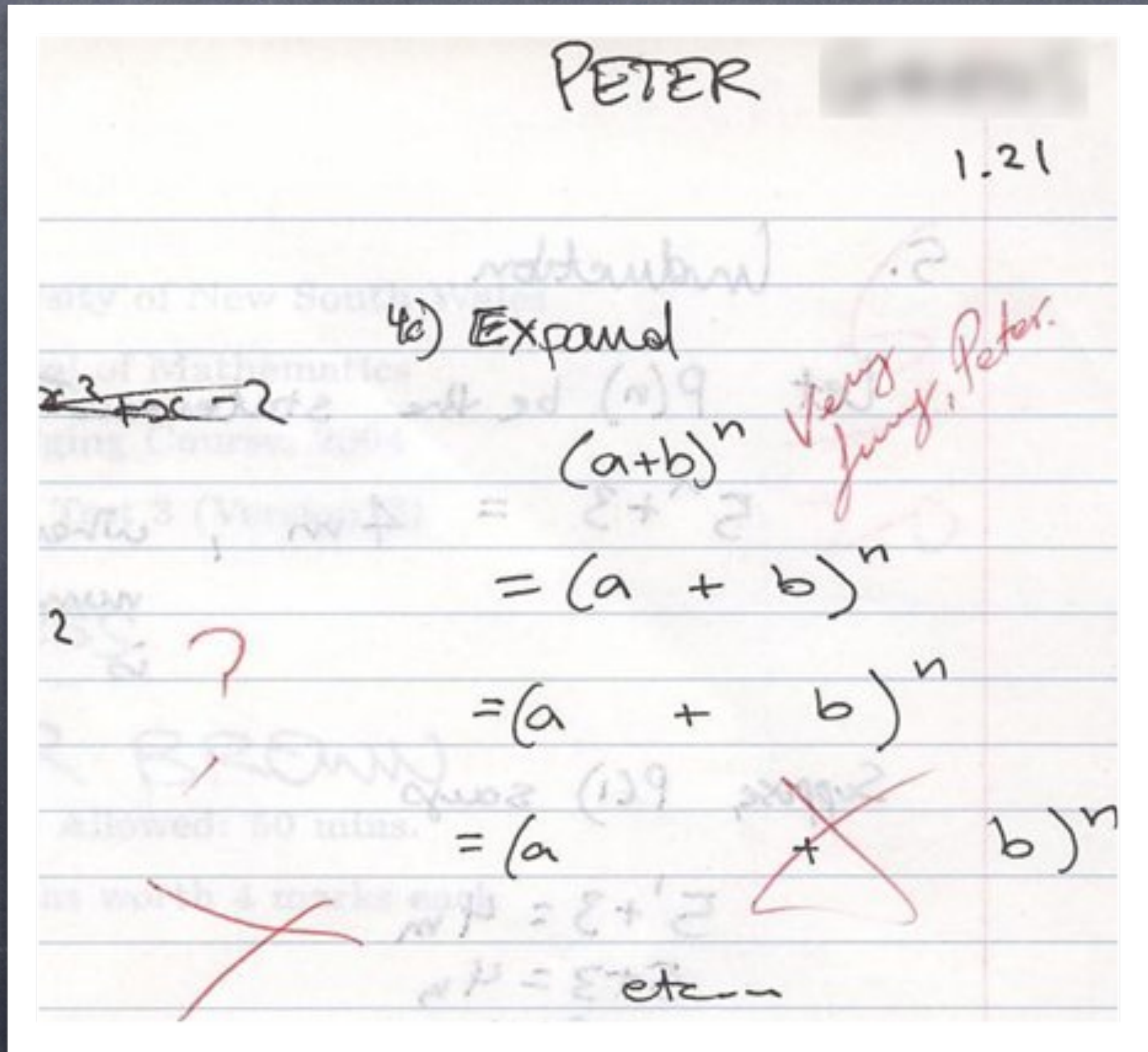
Polynomen zijn functies van de vorm

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

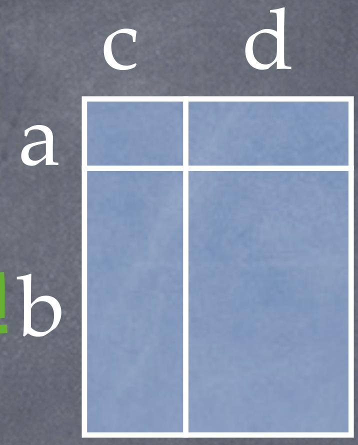
voorb.

$\#$ nulpunten $< n$

vereenvoudigen, factoriseren en oplossen van vergelijkingen



Polynomen kunnen op verschillende manieren worden geschreven



$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

d.w.z. te onthouden!!
(niet 'vreemde')

Een lijstje merkwaardige producten:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + (2+3)x + 2\cdot 3$$

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$$

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

$$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$$

Merkwaardige producten helpen bij het factoriseren van polynomen

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2 \qquad (x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

factoriseren is het zoveel mogelijk als product van termen schrijven van een polynoom:

"buiten haakjes brengen"
"ontbinden in factoren"

$$3x + 3 = \quad 3(x + 1)$$

$$3x^2 - 3x = \quad 3(x^2 - x) = \quad 3x(x - 1)$$

$$x^2 + 7x + 10 = \quad x^2 + (2 + 5)x + 2 \cdot 5 = \quad (x + 2)(x + 5)$$

$$x^2 - 16 = \quad x^2 - 4^2 = \quad (x + 4)(x - 4)$$

Merkwaardige producten helpen bij het factoriseren van polynomen

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2 \qquad (x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

factoriseren is nuttig bij het vereenvoudigen van expressies:

$$\frac{x^2 + 8x + 16}{x^2 - 16} = \frac{x^2 + 8x + 16}{(x - 4)(x + 4)} = \frac{x^2 + 2{\cdot}4x + 4^2}{(x - 4)(x + 4)}$$

$$= \frac{(x + 4)^{\cancel{2}}}{(x - 4)\cancel{(x + 4)}} = \frac{(x + 4)}{(x - 4)}$$

Merkwaardige producten helpen bij het factoriseren van polynomen

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2 \qquad (x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

factoriseren is nuttig bij het vereenvoudigen van expressies:

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + 3x - 10}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{x^2 + (5-2)x + 5(-2)}{(x + 2)(x - 2)}$$

$$= \frac{(x + 5)\cancel{(x - 2)}}{(x + 2)\cancel{(x - 2)}} = \frac{(x + 5)}{(x + 2)}$$

Een vergelijking 'oplossen' betekend dat we een onbekende naar de linker kant werken

Voor welke x geldt $2(x + 4) = 7x + 2$?

x moet als enige aan de linker kant overblijven

$2(x + 4) = 7x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 8 = 7x + 2$ (haakjes weg)

$\Leftrightarrow \quad 2x = 7x - 6$ (8 aftrekken)

$\Leftrightarrow \quad 2x - 7x = -6$ (7x aftrekken)

$\Leftrightarrow \quad -5x = -6$

$\Leftrightarrow \quad x = (-6) \,/\, (-5) = 6/5$ (door -5 delen)

$\therefore \; x = 6/5$

Een vergelijking ‘oplossen’ betekend dat we een onbekende naar de linker kant werken

Voor welke x geldt $\dfrac{5}{x-4} = \dfrac{6}{x-3}$?

$$\frac{5}{x-4} = \frac{6}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-3)\,\frac{5}{x-4} = 6 \qquad \text{(vermenig. met } x-3\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 5\,(x-3) = 6\,(x-4) \qquad \text{(vermenig. met } x-4\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x - 15 = 6x - 24 \qquad \text{(haakjes weg)}$$

$$\Leftrightarrow \quad -x = -9 \qquad \text{(tel } -6x + 15 \text{ op)}$$

$$\therefore \quad x = 9$$

Een vergelijking 'oplossen' betekend dat we een onbekende naar de linker kant werken

Voor welke x geldt $\dfrac{x}{x-4} = 6$?

$$\frac{x}{x-4} = 6$$

$\Leftrightarrow \ x = 6(x - 4)$ (vermenig. met x – 4)

$\Leftrightarrow \ x = 6x - 24$ (haakjes weg)

$\Leftrightarrow \ -5x = -24$ (trek 6x af)

$\Leftrightarrow \ x = (-24)/(-5)$ (delen door –5)

$$\therefore \ x = 24/5$$

Merkwaardige producten en factoriseren helpen bij kwadratische vergelijkingen

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$ $\qquad\qquad$ $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

Een kwadratische vergelijking heeft de vorm

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

bijv. $\quad x^2 - 5x + 4 = -2$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad\qquad (a = 1, b = -5, c = 6)$

$\Leftrightarrow x^2 + (-2-3)\, x + (-2)\cdot(-3) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \qquad\qquad \therefore\ x = 2$ óf $x = 3$

Merkwaardige producten en factoriseren helpen bij kwadratische vergelijkingen

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2 \qquad\qquad (x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

Een kwadratische vergelijking heeft de vorm

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

bijv. $2x^2 - 22x + 36 = 0$ (a = 2, b = –22, c = 36)

$\Leftrightarrow 2(x^2 - 11x + 18) = 0$ (buiten haakjes)

$\Leftrightarrow 2(x^2 + (-2-9)\,x + (-2)\cdot(-9)) = 0$

$\Leftrightarrow 2(x - 2)(x - 9) = 0$ $\quad\therefore\ x = 2$ óf $x = 9$

Merkwaardige producten en factoriseren zijn niet altijd nodig bij kwadratische vergelijkingen

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$ $\qquad$ $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

Een kwadratische vergelijking heeft de vorm

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

bijv. $\quad 4x^2 = 12$ $\qquad$ $(a = 4,\ b = 0,\ c = -12)$

$\Leftrightarrow x^2 = 3$ $\qquad$ (delen door 4)

$\therefore\ x = \sqrt{3}$ óf $x = -\sqrt{3}$.

Er is een algemene formule voor de oplossingen van kwadratische vergelijkingen

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

algemene (abc-) formule voor de oplossingen:

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

bijv. $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x_\pm = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$\therefore$ $x = 2$ óf $x = 3$

Er is een algemene formule voor de oplossingen van kwadratische vergelijkingen

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

algemene (abc-) formule voor de oplossingen:

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

wortel van een negatief getal

bijv. $x^2 + x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$\therefore$ geen reële oplossingen...

er is geen (reëel) getal x waarvoor $x^2+x+1=0$

Kwadratische functies zijn te ontbinden in lineaire factoren als de discriminant ≥ 0

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{of } y = ax^2 + bx + c$$

Voor meer inzicht, herschrijf f(x):

$$f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x^2 + 2\frac{b}{2a}x) + c$$

$$= a[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2] + c$$

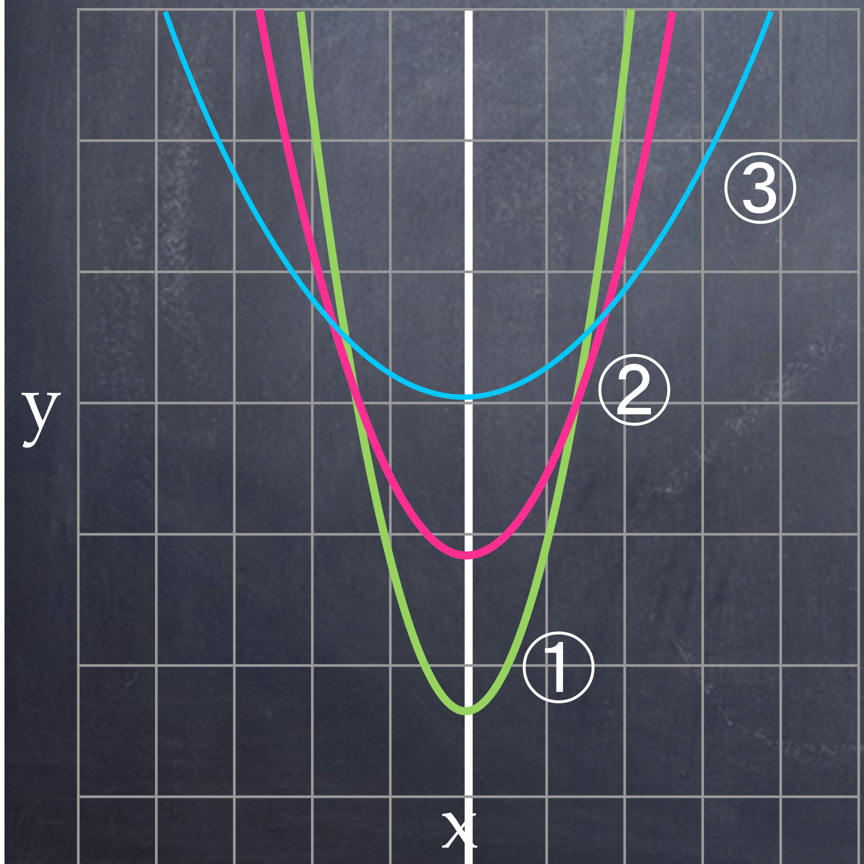
$$= a[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + (\frac{b}{2a})^2] - a(\frac{b}{2a})^2 + c$$

$$= a(x + \frac{b}{2a})^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Kwadratische functies zijn te ontbinden in lineaire factoren als de discriminant ≥ 0

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{of } y = ax^2 + bx + c$$

Voor meer inzicht, herschrijf f(x):



$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

dus $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

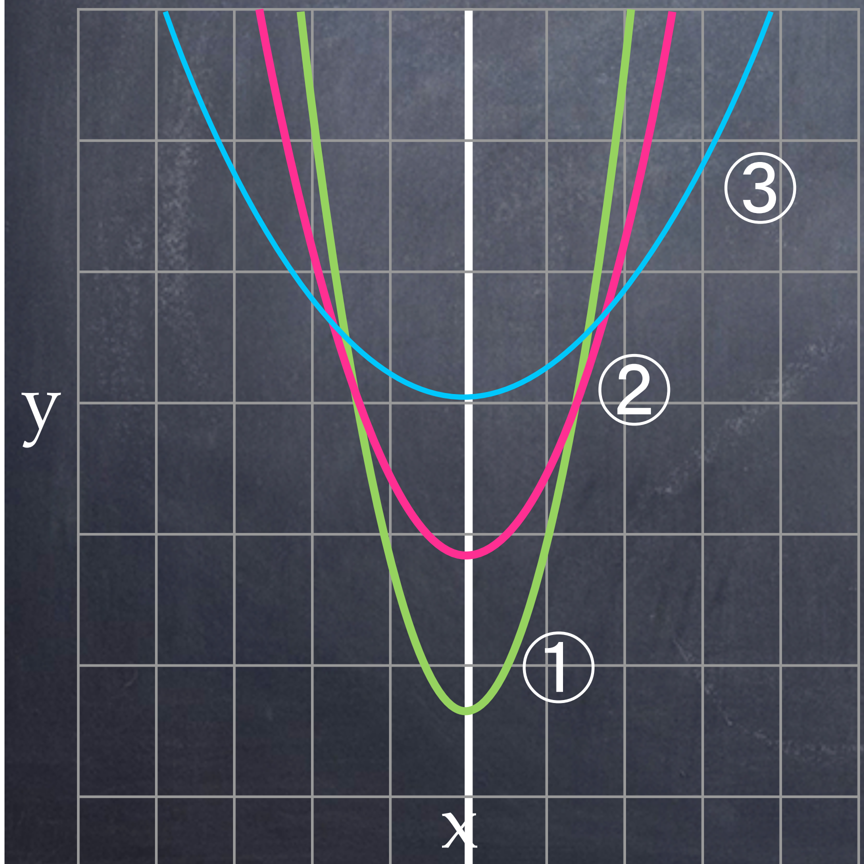
$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

alleen als <u>discriminant</u> ≥ 0

Kwadratische functies zijn te ontbinden in lineaire factoren als de discriminant ≥ 0

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{of } y = ax^2 + bx + c$$

Voor meer inzicht, herschrijf f(x):



$$f(x) = a\underbrace{(x + \frac{b}{2a})^2}_{\geq 0} - \underbrace{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}_{\text{constant}}$$

$\Rightarrow$ f(x) heeft min / max op $-\dfrac{b}{2a}$

dus $f(x) = 0$

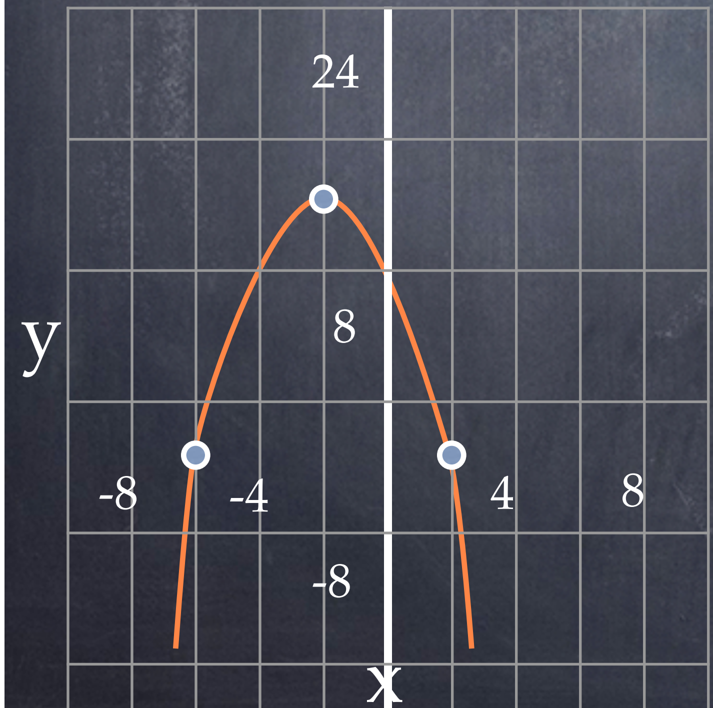
$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kwadratische functies zijn te ontbinden in lineaire factoren als de discriminant ≥ 0

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{of } y = ax^2 + bx + c$$

$$\text{dus } f(x) = 0 \iff x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$f(x) \text{ heeft min/max op } -\frac{b}{2a}$$



voorb. $f(x) = -x^2 - 4x + 12$

nulpunten $x = -\frac{-4}{-2} \pm \frac{\sqrt{4^2 + 4\cdot 12}}{-2}$

$\therefore x = 2$ of $x = -6$

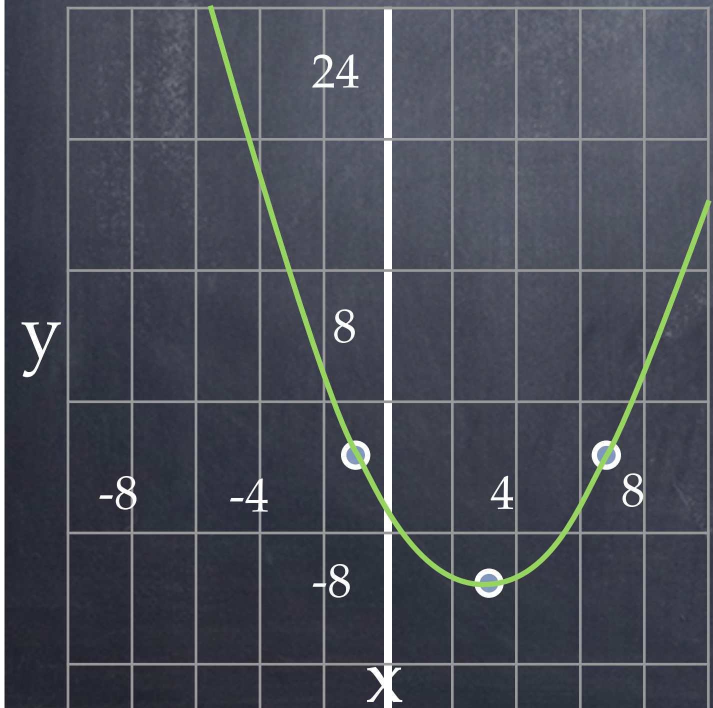
maximum: $x = -2$, $y = 16$

Kwadratische functies zijn te ontbinden in lineaire factoren als de discriminant ≥ 0

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{of } y = ax^2 + bx + c$$

$$\text{dus } f(x) = 0 \iff x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$f(x) \text{ heeft min/max op } -\frac{b}{2a}$$



voorb. $f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - 3x - 3\tfrac{1}{2}$

$$\text{nulpunten } x = -\frac{3}{2\cdot\frac{1}{2}} \pm \frac{\sqrt{3^2 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{2}}}{2\cdot\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ x = -1 \text{ of } x = 7$$

minimum: $x = 3,\ y = -8$

Er zijn een aantal belangrijke functies die als bouwstenen fungeren in andere functies

We bespreken vijf elementaire functies:

- polynomen (veeltermen) $f(x) = 2x^2 +3x - 5$
- rationale functies $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 + x - 4}$
- absolute waarde functie $f(x) = |x|$
- exponentiële functie $f(x) = a^x$
- faculteit functie $f(n) = n!$

Rationale functies hebben asymptoten op de nulpunten van de polynoom in de noemer

Rationale functies hebben de vorm

$$f(x) = \frac{c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0}{d_k x^k + \cdots + d_1 x + d_0}$$

voorb.

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2+2x-3}$$

$$= \frac{x-2}{(x-1)(x+3)}$$

Er zijn een aantal belangrijke functies die als bouwstenen fungeren in andere functies

We bespreken vijf elementaire functies:

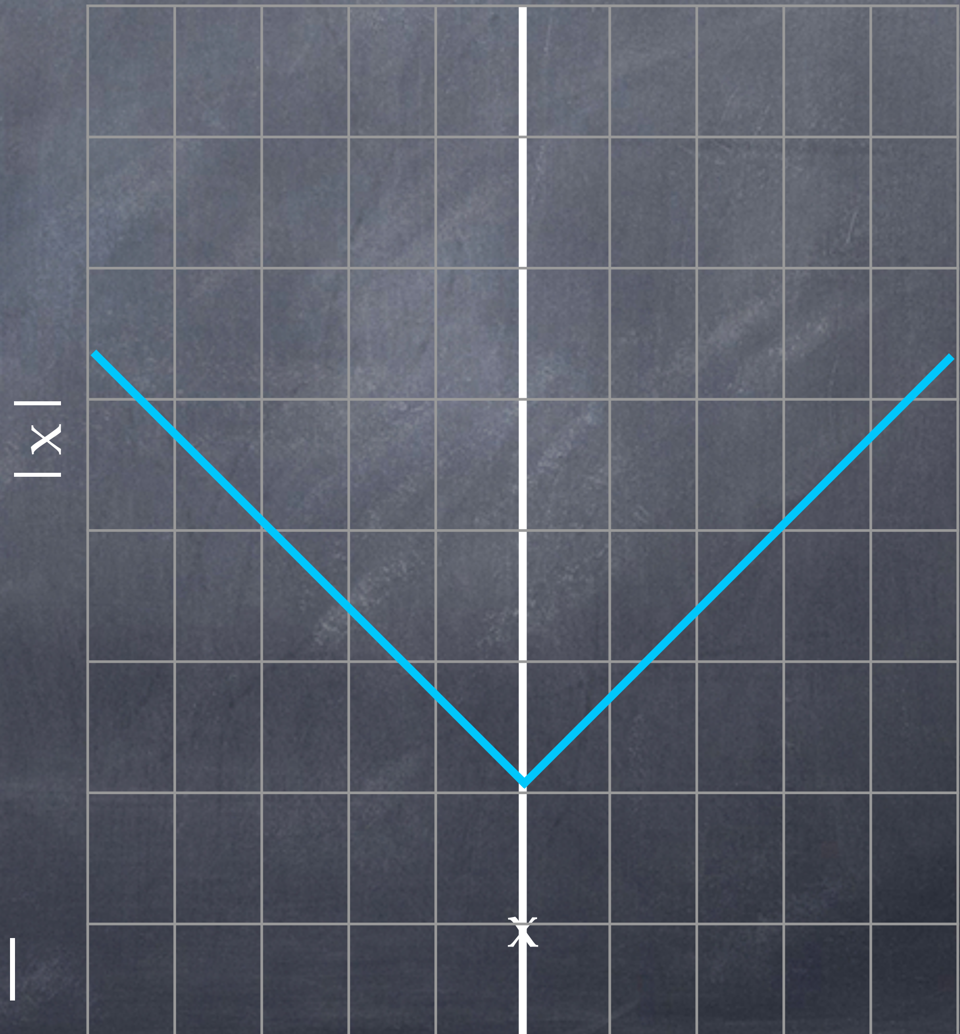
- polynomen (veeltermen) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$
- rationale functies $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 + x - 4}$
- absolute waarde functie $f(x) = |x|$
- exponentiële functie $f(x) = a^x$
- faculteit functie $f(n) = n!$

De absolute waarde functie bestaat uit twee delen en heeft een stuksgewijs voorschrift

de absolute functie is gedefinieerd als

$$|x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

stuksgewijs functie-voorschrift



rekenregel:

$$|a \cdot x| = |a| \cdot |x|$$

maar $|x \pm a| \neq |x| \pm |a|$

Programma vandaag

- Samenvatting: algebra
- Functies
- Gebruik van functies: Het "oplossen" van vergelijkingen
- Exponentiele functies
- Continuiteit
- Inverteren van functies
- Logaritme

Er zijn een aantal belangrijke functies die als bouwstenen fungeren in andere functies

We bespreken vijf elementaire functies:

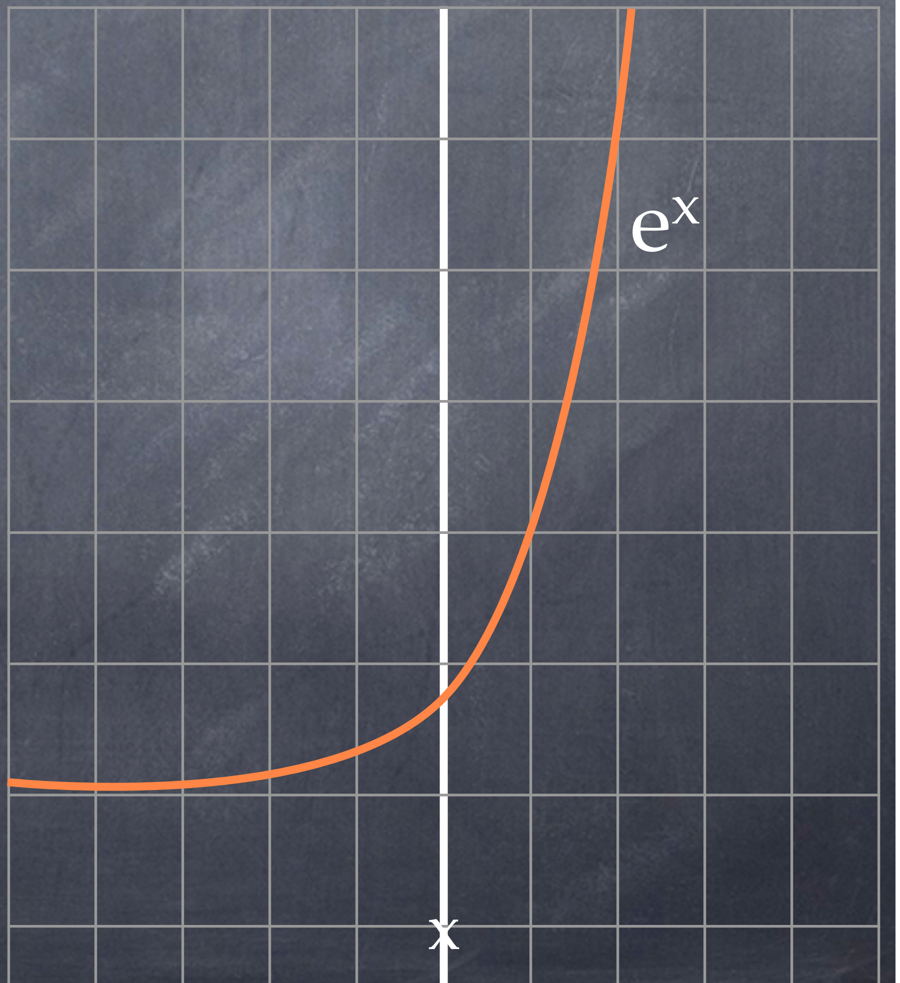
- polynomen (veeltermen) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$
- rationale functies $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 + x - 4}$
- absolute waarde functie $f(x) = |x|$
- exponentiële functie $f(x) = a^x$
- faculteit functie $f(n) = n!$

Exponentiële functies zijn altijd positief en stijgen steeds sneller of dalen steeds langzamer

een exponentiële functie heeft de vorm

$$f(x) = a^x$$

a is positief



Exponentiële functies zijn altijd positief en stijgen steeds sneller of dalen steeds langzamer

een exponentiële functie heeft de vorm

$$f(x) = a^x$$

a is positief

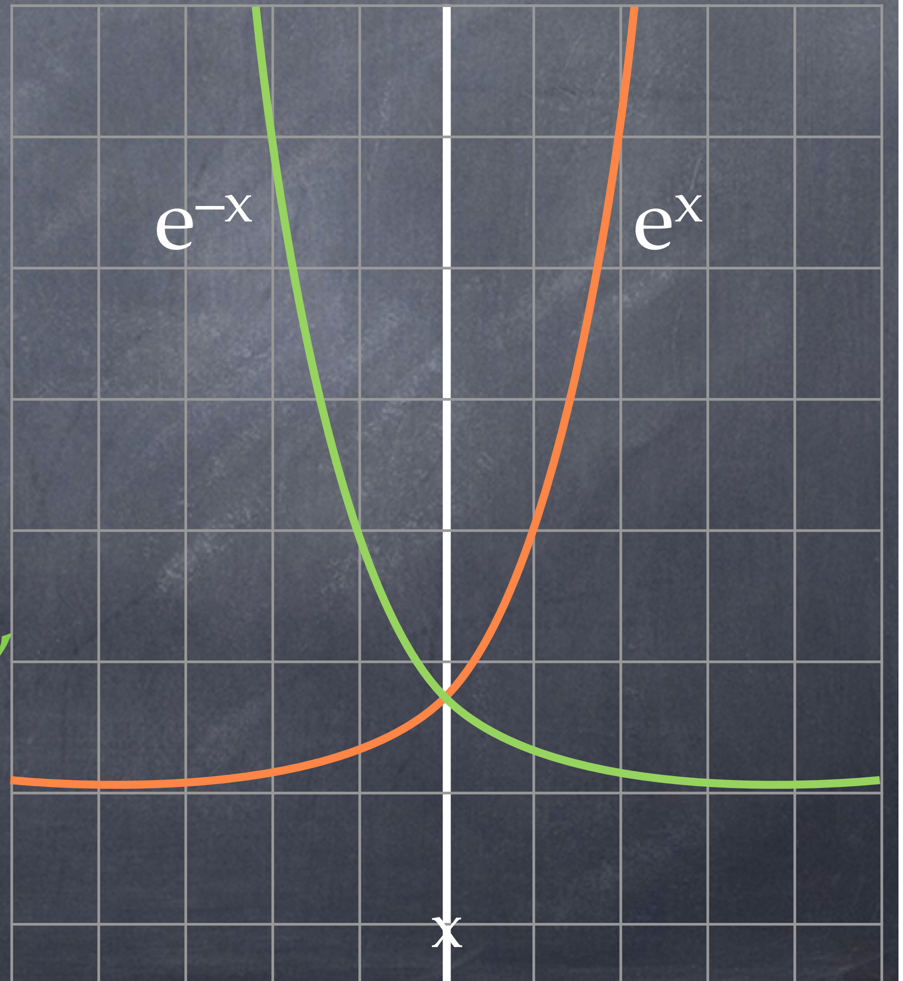
in toepassingen bijna altijd

$$a = e \approx 2{,}718$$

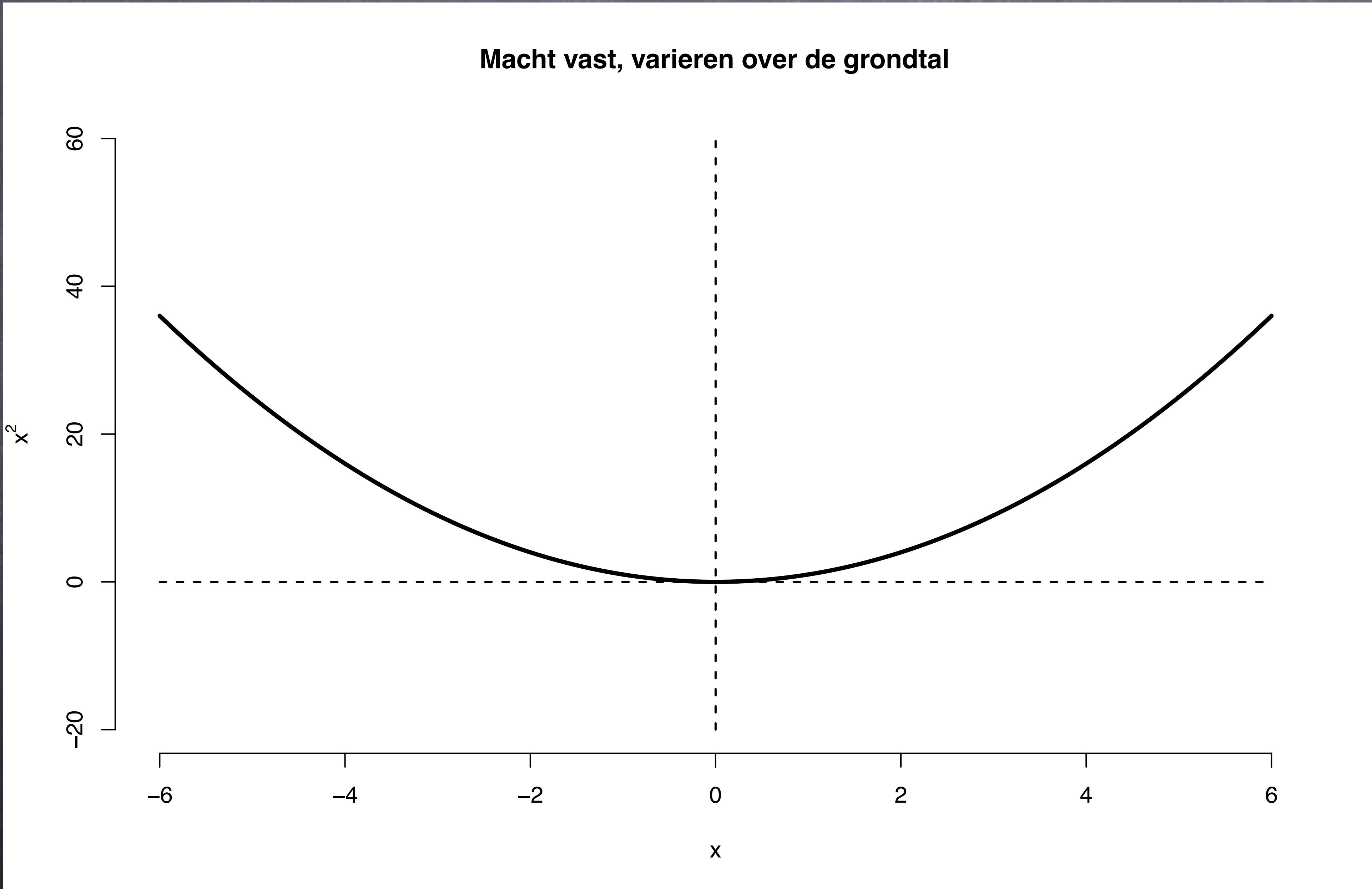
speciaal getal, net als π

omdat $a^x = (e^b)^x = e^{bx}$

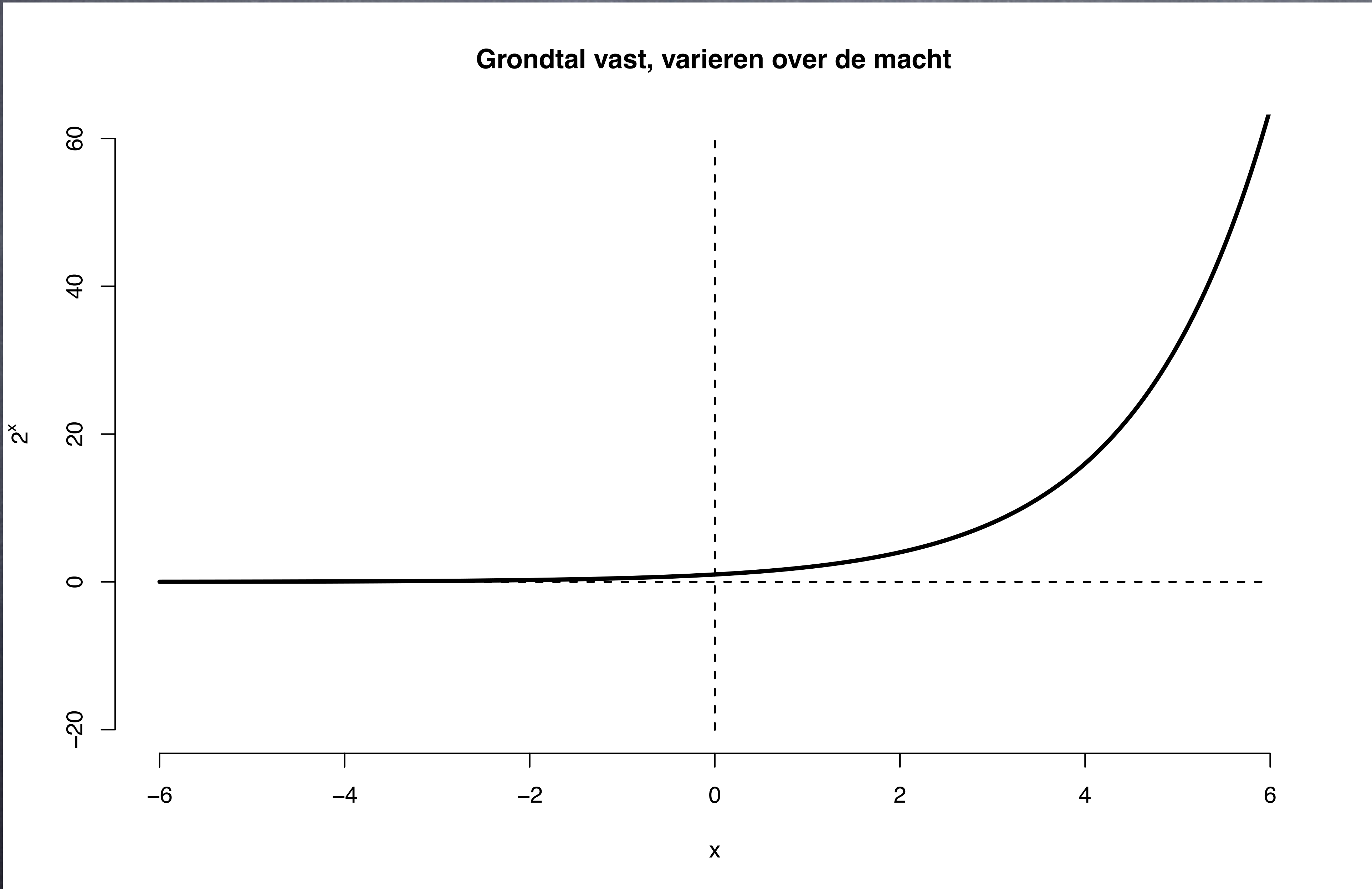
e^{bx} daalt als $b < 0$ $\Leftrightarrow a < 1$



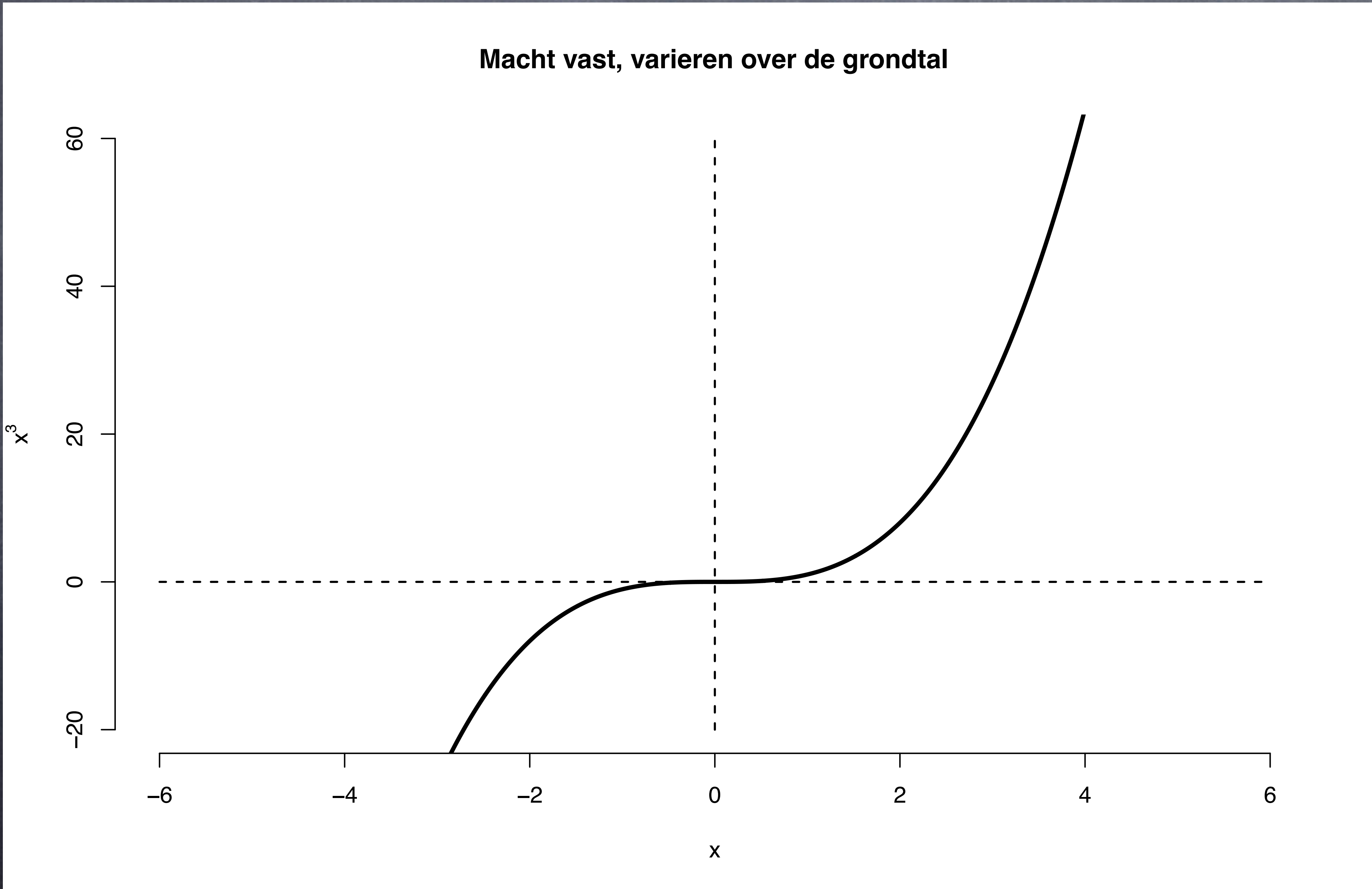
x^2: Macht vast varieren over de grondtal



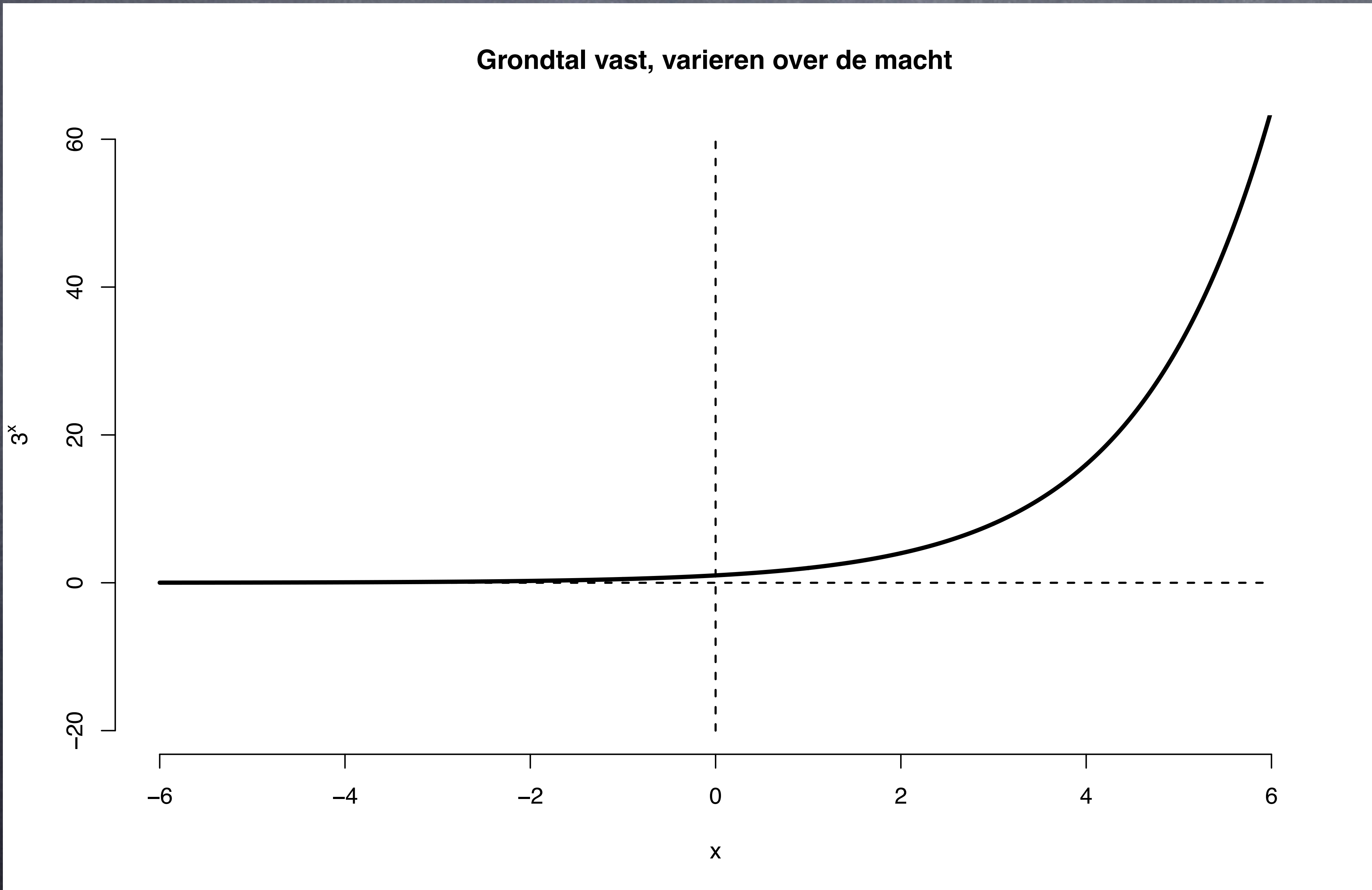
2^x: Grondtal vast varieren over de macht



x^3: Macht vast varieren over de grondtal

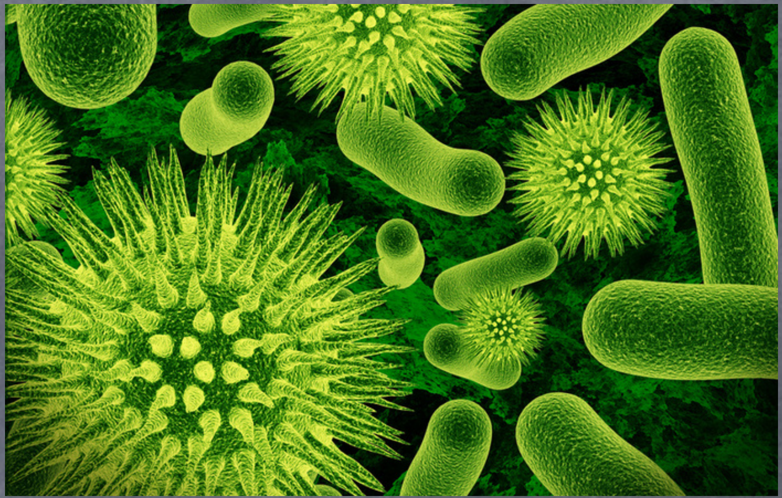


3^x: Grondtal vast varieren over de macht



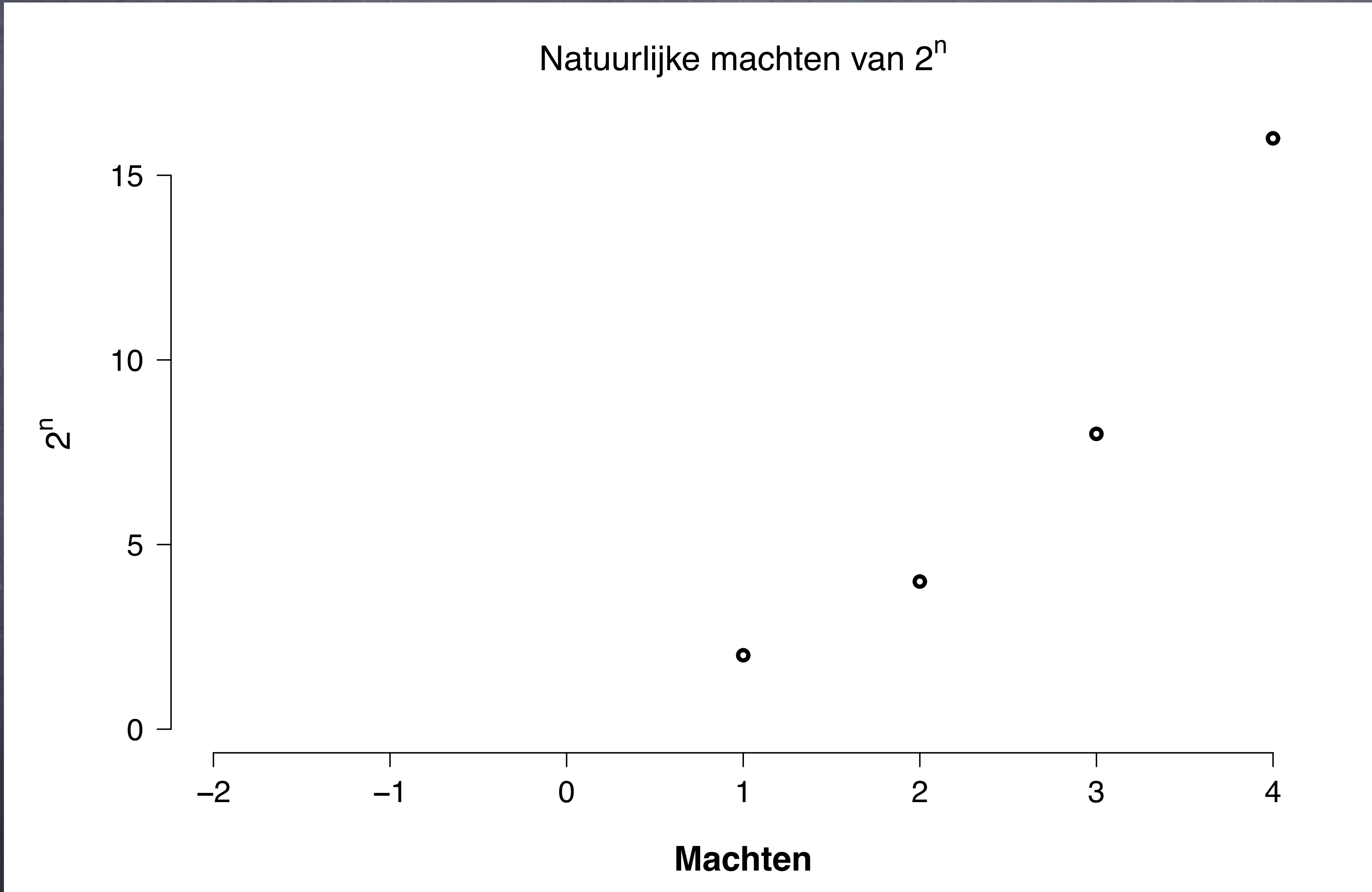
Bacterien 2^x

Een bacterie splits zich elke 20 minuten.Elke 20 minuten is er een nieuwe generatie van bacterien



- Hoeveel bacterien zijn er na 10 generaties?
- Hoeveel bacterien zijn er na 11 generaties?
- Op de 3de generatie zie ik 600 bacterien hoeveel waren het er op de 1ste?
- Hoeveel bacterien zijn er na 10,5 generaties?
- Hoeveel reproducties heb ik nodig voor 5000 bacterien als ik er met 1 begin?

Machten van a^n: Natuurlijke machten

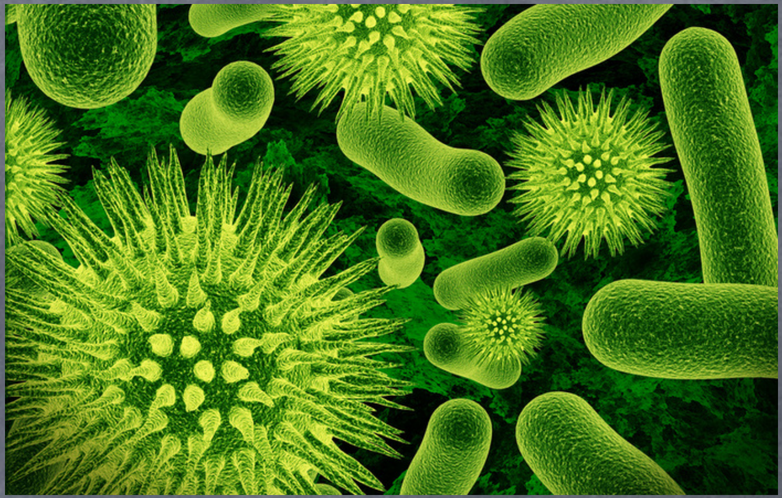


$a^n = a \cdot \ldots \cdot a$

$a \cdot a^n = a \cdot (a \cdot \ldots \cdot a) = a^{n+1}$

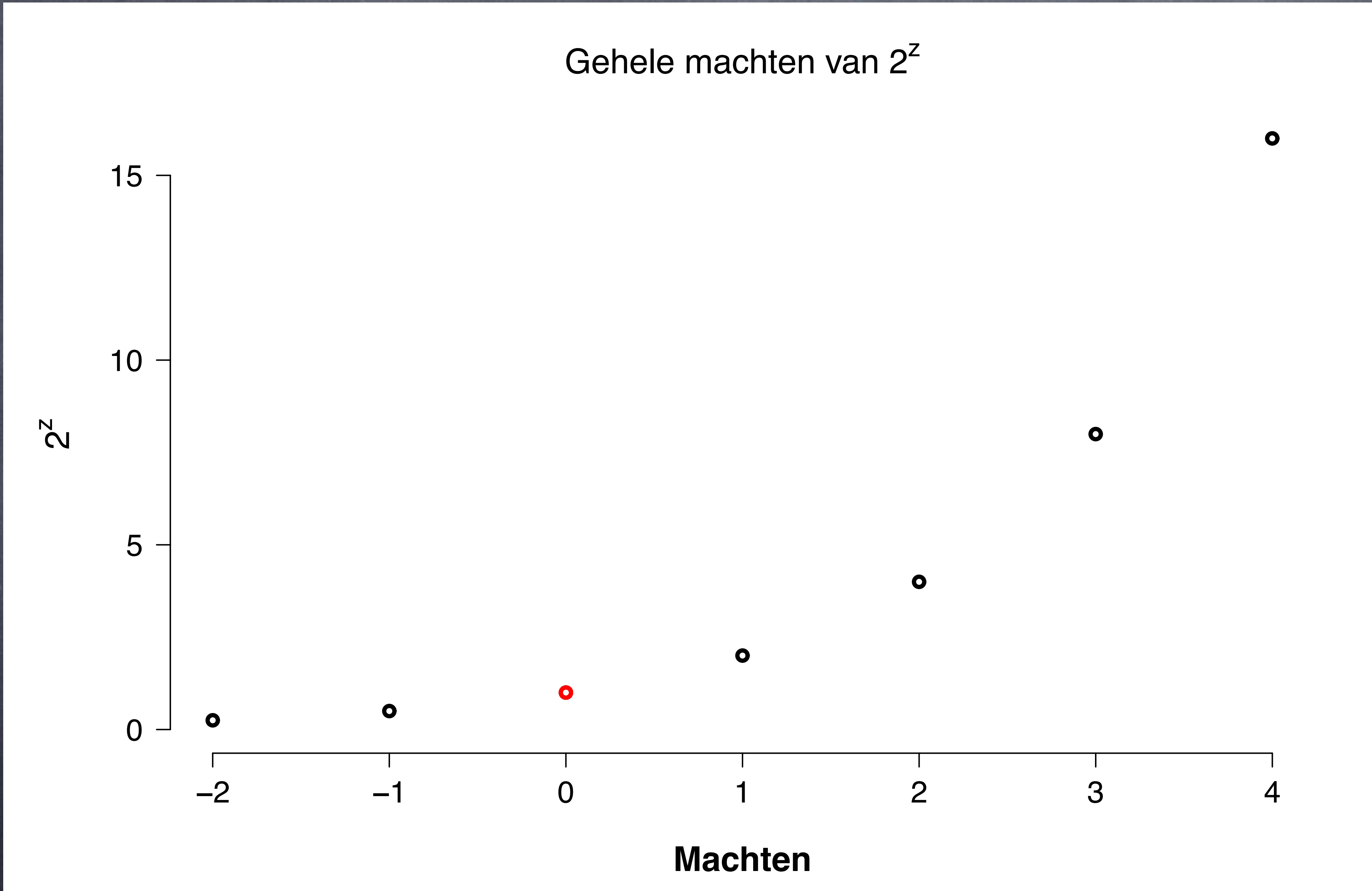
Bacteria $y=a^x$

Een bacterie splits zich elke 20 minuten.Elke 20 minuten is er een nieuwe generatie van bacterien



- Hoeveel bacterien zijn er na 10 generaties?
  - $y=2^{10}$
- Hoeveel bacterien zijn er na 11 generaties?
  - $y=2^{11}$
- 0^0 ?
  - $0^{n-n}=\dfrac{0\cdot....\cdot 0}{0\cdot....\cdot 0}$ =ongedefinieerd

Machten van a^z: Gehele machten

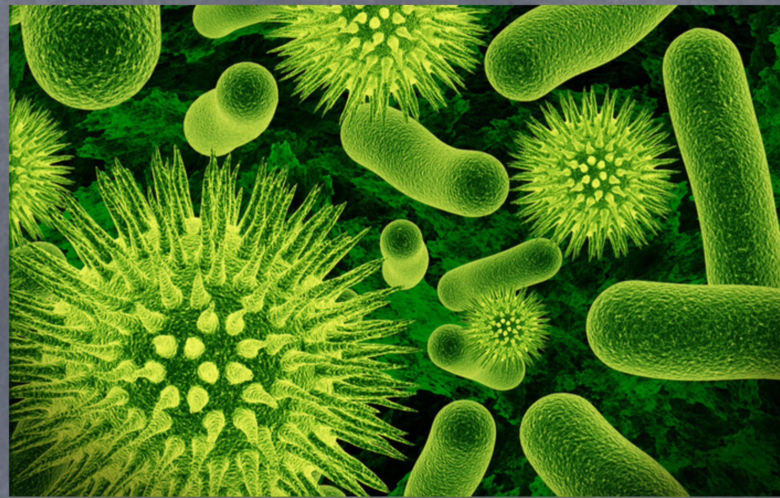


$$a^{-n} = \frac{1}{a\cdot \ldots \cdot a}$$

$$a^0 = a^{n-n} = \frac{a\cdot \ldots \cdot a}{a\cdot \ldots \cdot a} = 1$$

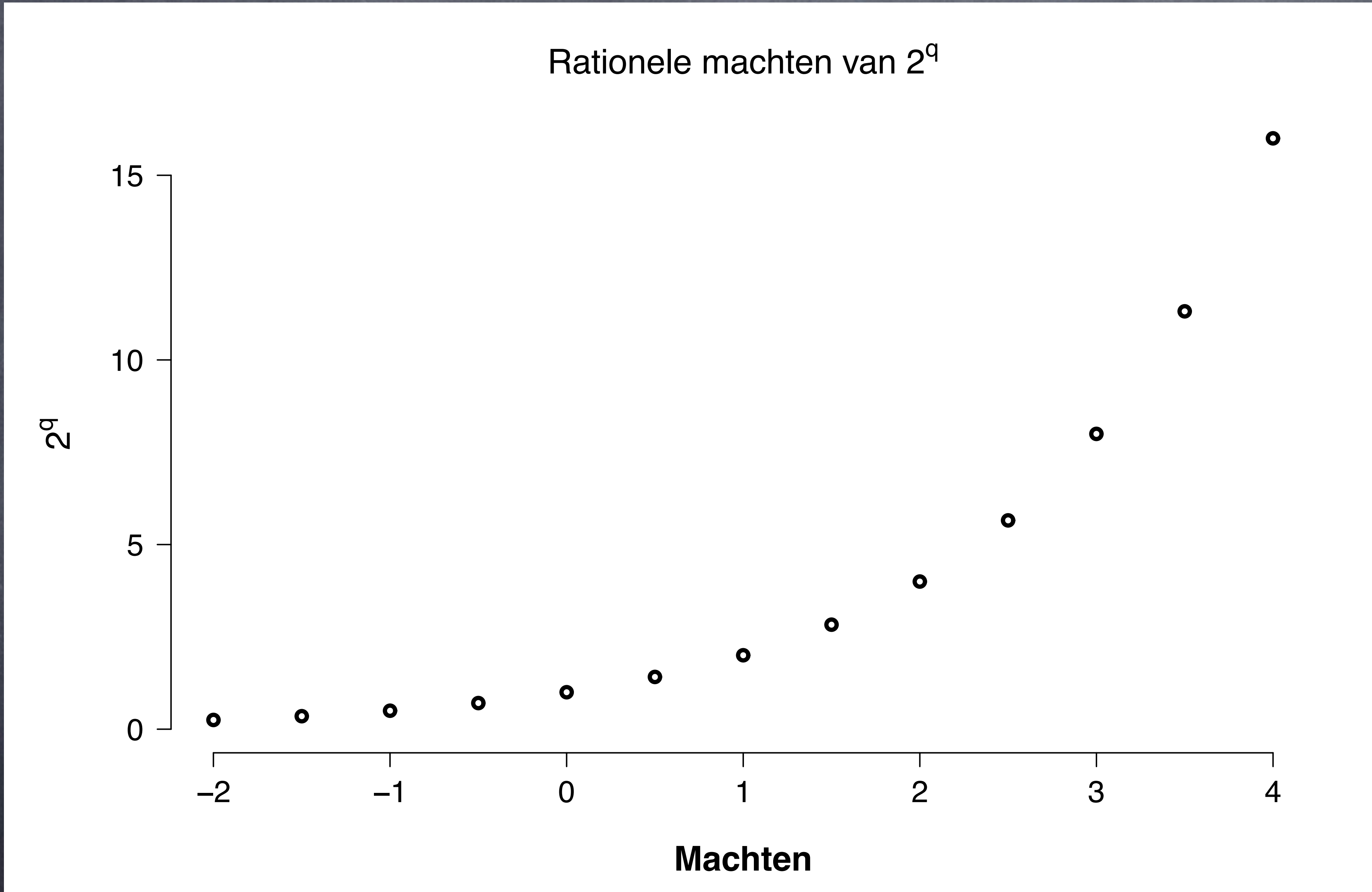
Bacteria $y=a^x$

Een bacterie splits zich elke 20 minuten.Elke 20 minuten is er een nieuwe generatie van bacterien



- Op de 3de generatie zie ik 600 bacterien hoeveel waren het er op de 1ste?
    - $600=z\cdot 2^3$
    - $600\ 2^{-3} = z\cdot 2^3 \cdot 2^{-3} = z \cdot 2^0 = z$

Machten van a^x: Rationele machten

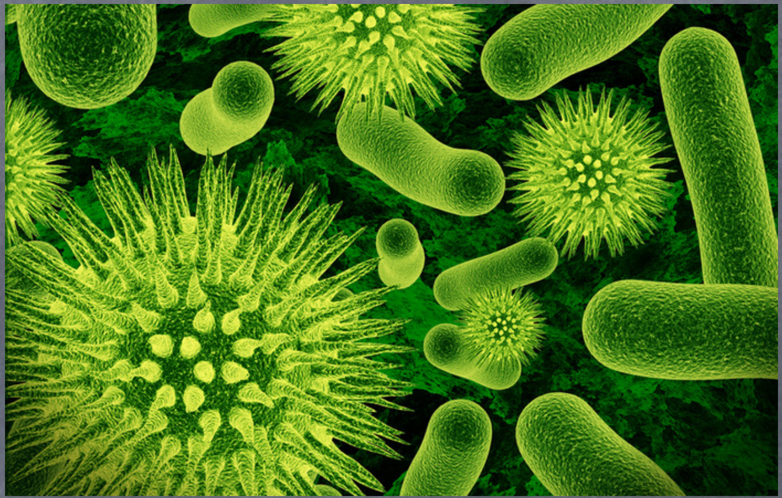


$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$a^1 = (a^{1/m})^m = (a^{1/m}) \cdot \ldots \cdot (a^{1/m})$

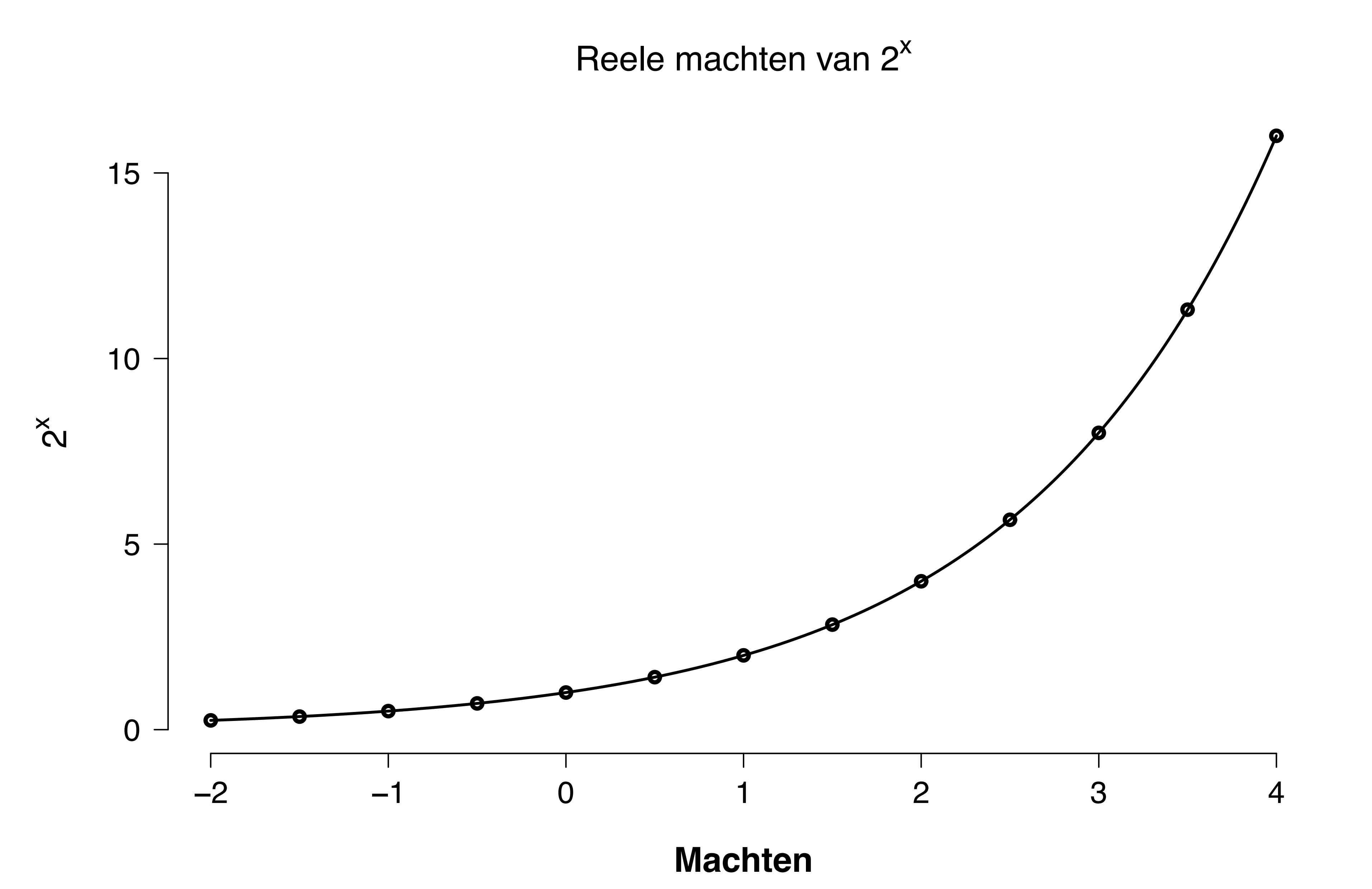
Bacteria $y=a^x$

Een bacterie splits zich elke 20 minuten.Elke 20 minuten is er een nieuwe generatie van bacterien



- Hoeveel bacterien zijn er na 10,5 generaties?
  - $y=2^{10,5}=2^{10+0,5}=2^{10}(2^{0,5})$

Machten van a^x: Reele machten



We hebben de volgende functies gezien en wat eigenschappen van besproken

We bespreken vijf elementaire functies:

- polynomen (veeltermen) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$
- rationale functies $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2 + x - 4}$
- absolute waarde functie $f(x) = |x|$
- exponentiële functie $f(x) = a^x$
- faculteit functie $f(n) = n!$

Programma vandaag

- Samenvatting: algebra
- Functies
- Gebruik van functies: Het "oplossen" van vergelijkingen
- Exponentiele functies
- Continuiteit: http://goo.gl/GTXj6Q 2:01
- Inverteren van functies
- Logaritme

Continuiteit van een monoom

- Een functie heet continue in een specifiek punt x_0, wanneer
- $f(x_0+h)$ naar $f(x_0)$ gaat naar mate h kleiner wordt
  - $\lim_{h -> 0} f(x0+h) = f(x0)$

- Is x^2 continue in 3?

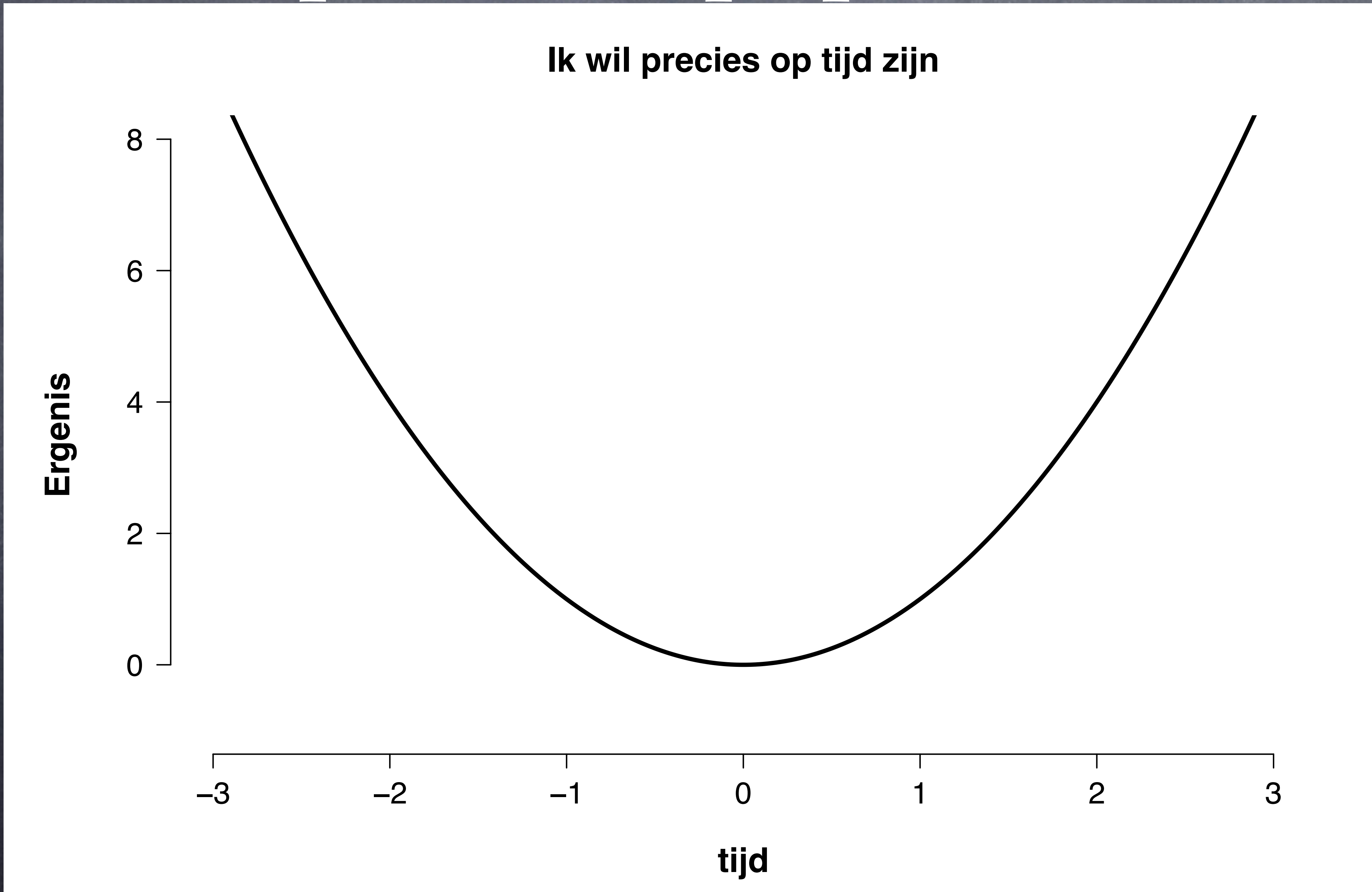
Continuiteit

- Vb. $f(x)=x^2$, en x_0 is 3, dan geldt
- $f(x_0)=9$ en
- $f(x_0+h)=(x_0+h)^2=x_0{}^2+2x_0h+h^2$
  - $f(3+h) = 9+6h+h^2$
- Stel $h=0.1$
  - $f(3.1)=9+0.6+0.01=9.61$
- Stel $h=0.01$
  - $f(3.01)=9+0.06+0.001=9.0601$
- Stel $h=0.001$
  - $f(3.01)=9.006001$

Quiz

- Is x^2 overal continue?

Continuiteit: functie tekenen zonder pen van papier te halen



Welke van deze functies zijn continue?

We bespreken vijf elementaire functies:

- polynomen (veeltermen) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$
- rationale functies $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2+x-4}$
- absolute waarde functie $f(x) = |x|$
- exponentiële functie $f(x) = a^x$

Quiz

- Is a^x continue?

a^x is continue

- Voor willekeurige getal ξ
- Target: $f(\xi)=a^{\xi}$
- $f(\xi+h)=a^{\xi+h}=a^h a^{\xi}$
- Als h naar 0 gaat dan gaat a^0 naar 1, voor a >0 en dus gaat
- $f(\xi+h)$ naar $a^{\xi}=f(\xi)$

Programma vandaag

- Samenvatting: algebra
- Functies
- Gebruik van functies: Het “oplossen” van vergelijkingen
- Continuiteit
- Inverteren van functies
- Logaritme

“Voorwaarts” vs inverse functies

- Voorwaarts $f(x) = y$
  - f: X -> Y
  - Domein van f naar het beeld van f
- Inverse $f^{-1}(y) = x$
  - f^{-1}: Y -> X
  - f^{-1} is een functie van het beeld van f
- Identiteits functie
  - $f^{-1}(f(x)) = \ldots?$ $f(f^{-1}(y)) = \ldots?$

"Voorwaarts" vs inverse functies

- Voorwaarts $f(x) = x^2 = y$
- Inverse $f^{-1}(y) = y^{1/2}$
- $f^{-1}(f(x)) = \ldots ?$
- $f^{-1}(f(x)) = (x^2)^{1/2}$
- $f(f^{-1}(y)) = (y^{1/2})^2$
- $f: X -> Y$
- X positieve getallen, Y positieve getallen, werkt niet als in het domein van $f < 0$.

"Voorwaarts"	Inverse
• $f(x) = x + a = y$	• $f^{-1}(y) = y - a$
• $f(x) = a\,x = y$	• $f^{-1}(y) = y / a$
• $f(x) = x^2 = y$	• $f^{-1}(y) = y^{1/2}$
• $f(x) = x^r = y$	• $f^{-1}(y) = y^{1/r}$
• $f(x) = a^x = y$	• $f^{-1}(x) = \log_a(y)$

Programma vandaag

- Samenvatting: algebra
- Functies
- Gebruik van functies: Het "oplossen" van vergelijkingen
- Exponentiele functie
- Continuiteit
- Inverteren van functies
- Logaritme

Context van oplossen van vergelijkingen

- Polynomen bestonden uit monomen:

- $\text{grondtal}^{\text{macht}}$=“uitkomst”

- Deze zijn op te lossen als twee van de drie bekend zijn.

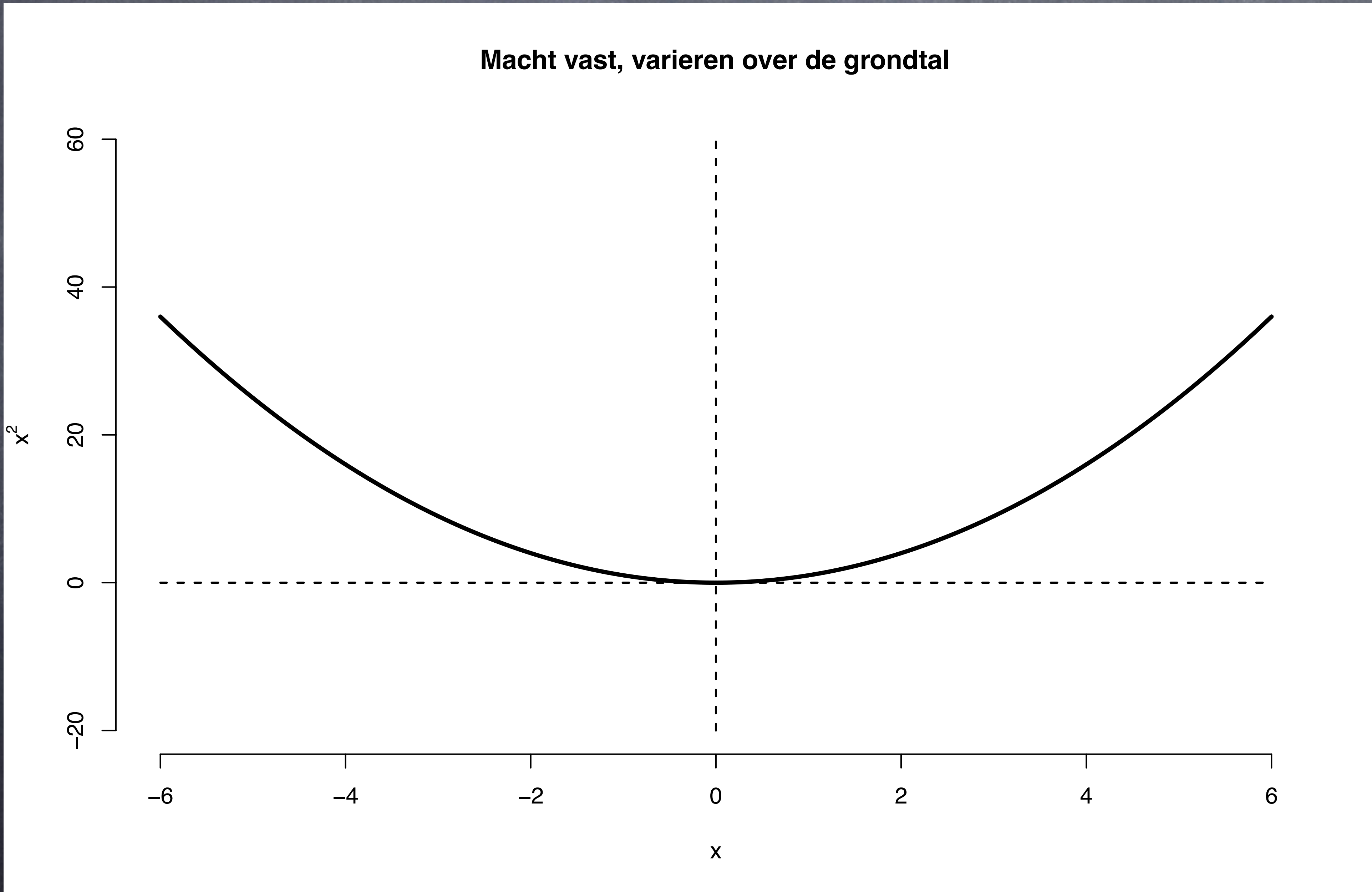
$\text{grondtal}^{\text{macht}} = \text{“uitkomst”}$

grondtal	macht	“uitkomst”	vb
Gegeven	Gegeven	Onbekend	$y=3^2$
Onbekend	Gegeven	Gegeven	$3=a^2$
Gegeven	Onbekend	Gegeven	$64=2^x$

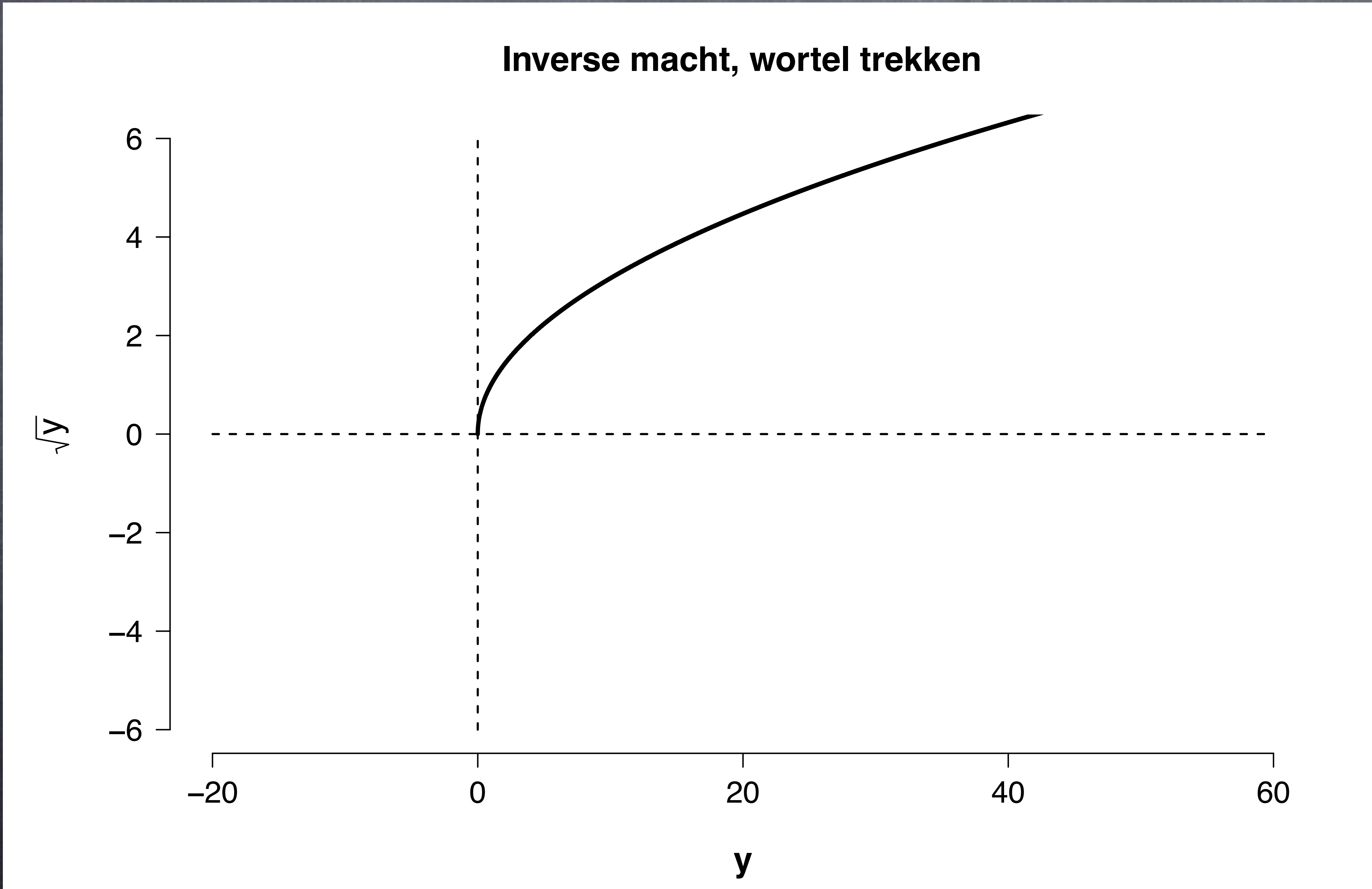
$\text{grondtal}^{\text{macht}} = \text{“uitkomst”}$

grondtal	macht	“uitkomst”	vb
Gegeven	Gegeven	Onbekend	$y=3^2$
Onbekend	Gegeven	Gegeven	$3=a^2$
Gegeven	Onbekend	Gegeven	$64=2^x$

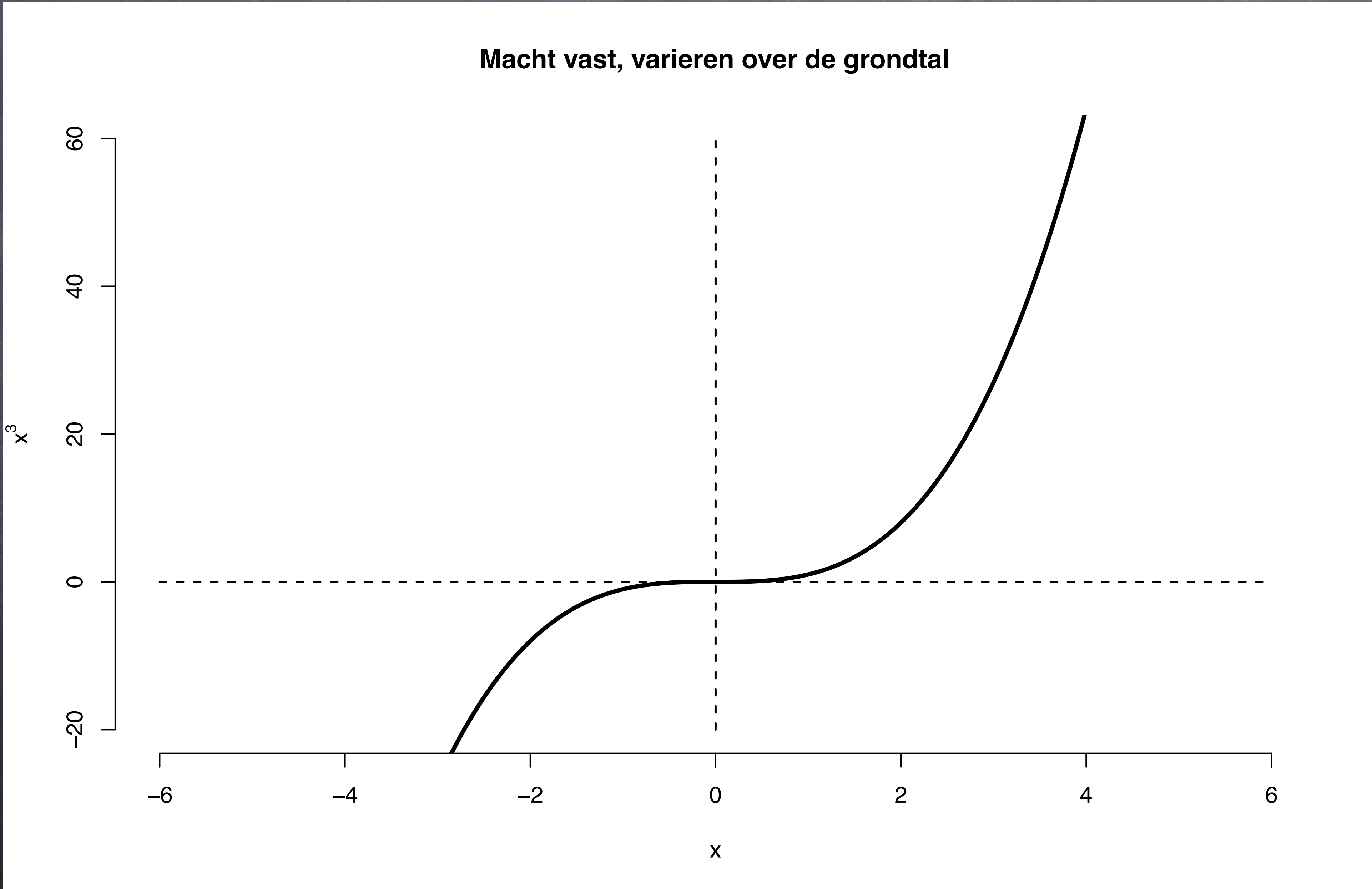
x^2: Macht vast varieren over de grondtal



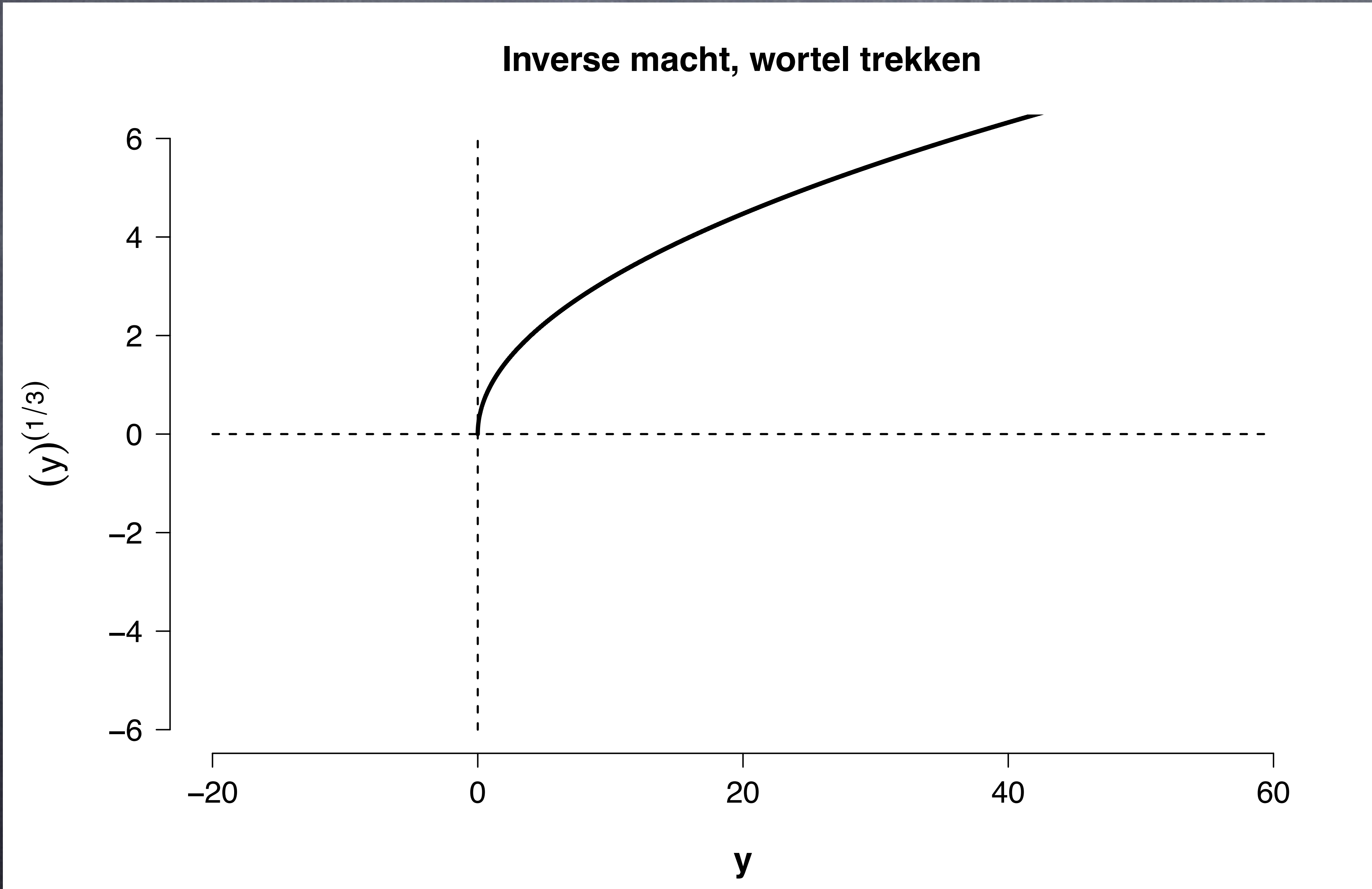
Inverse van $y=x^2$ is $y^{1/2}$



x^3: Macht vast varieren over de grondtal



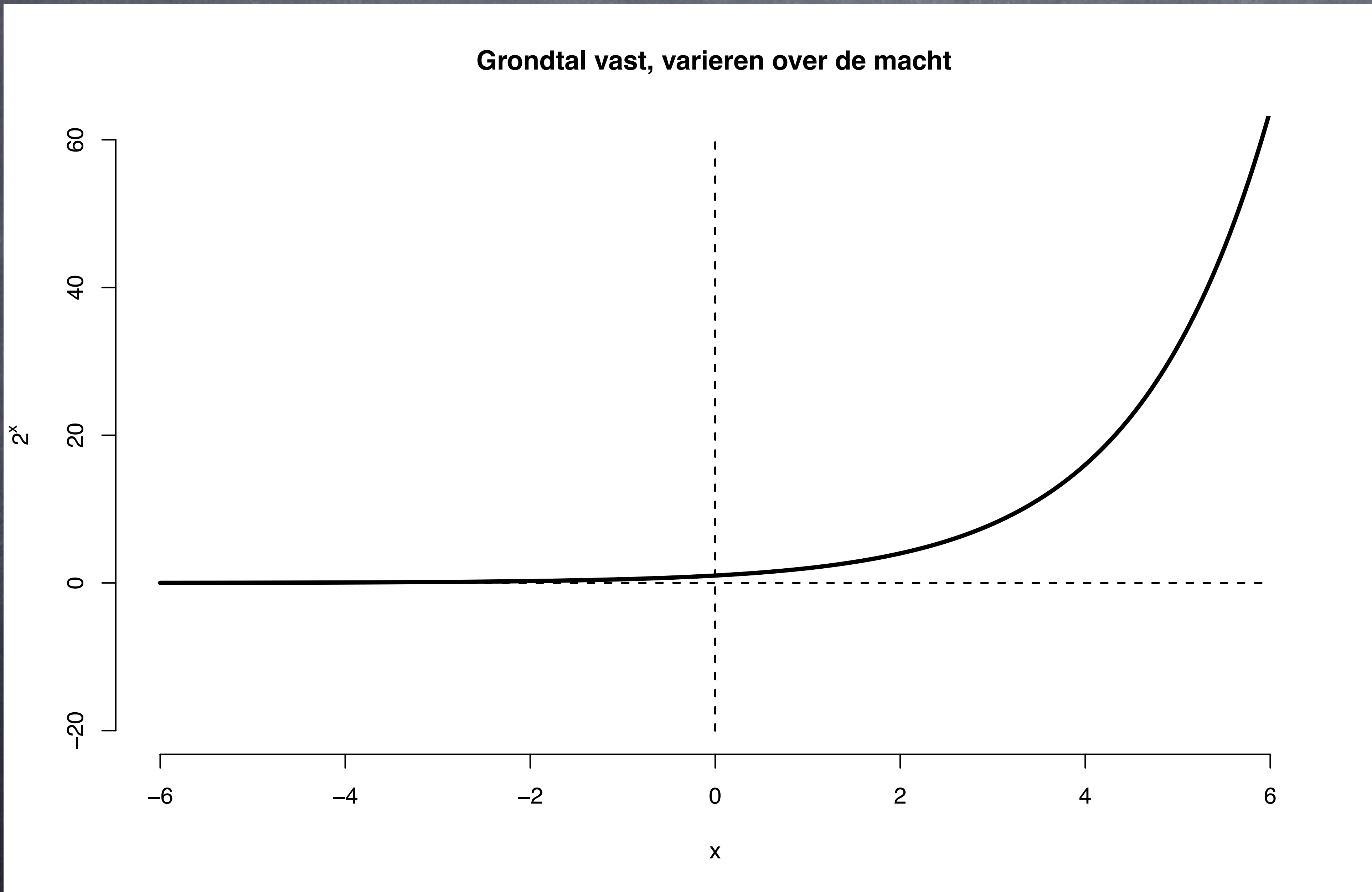
Inverse van y=x^3 is y$^{1/3}$



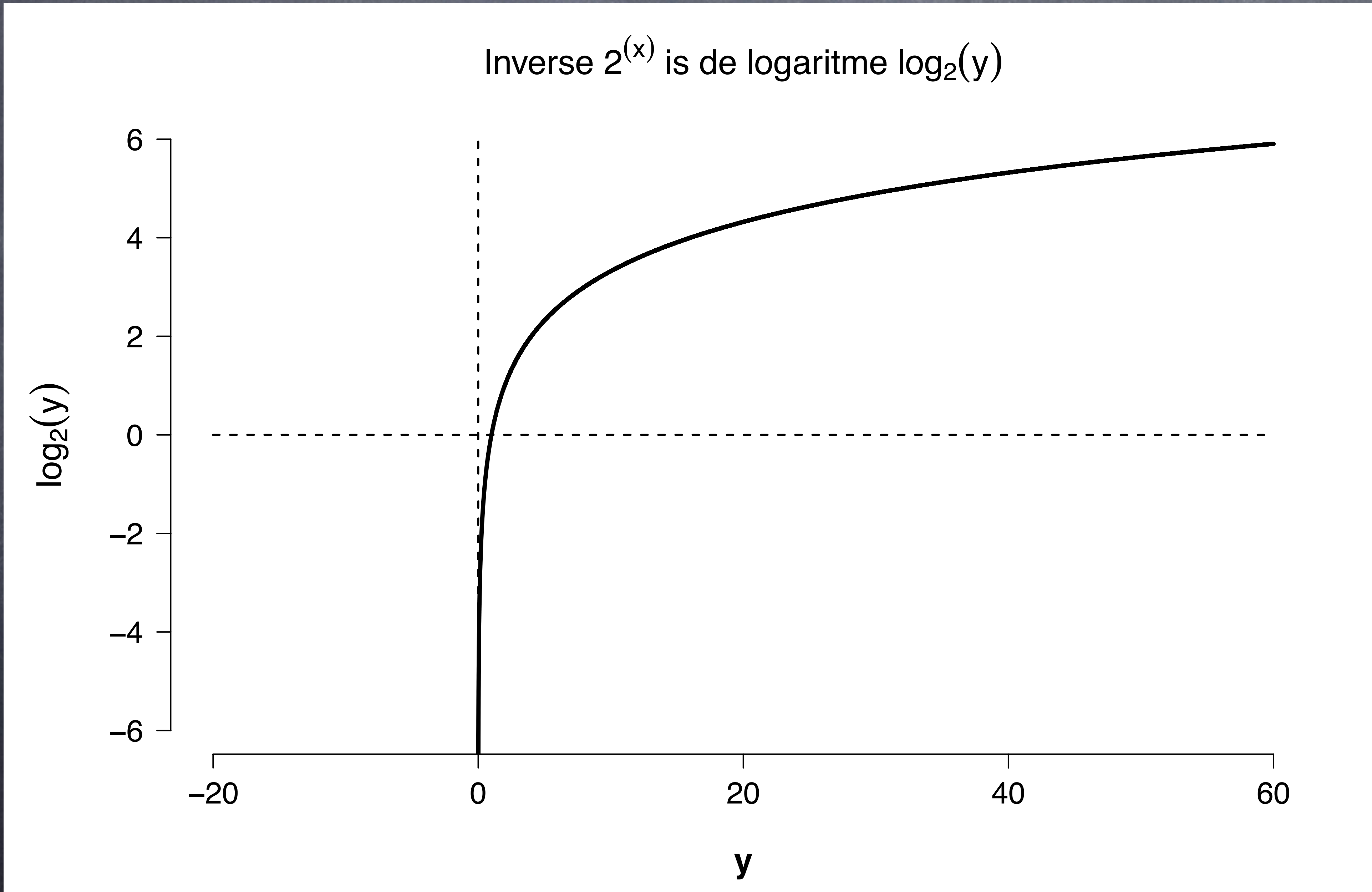
$\text{grondtal}^{\text{macht}} = \text{“uitkomst”}$

grondtal	macht	“uitkomst”	vb
Gegeven	Gegeven	Onbekend	$y=3^2$
Onbekend	Gegeven	Gegeven	$3=a^2$
Gegeven	Onbekend	Gegeven	$64=2^x$

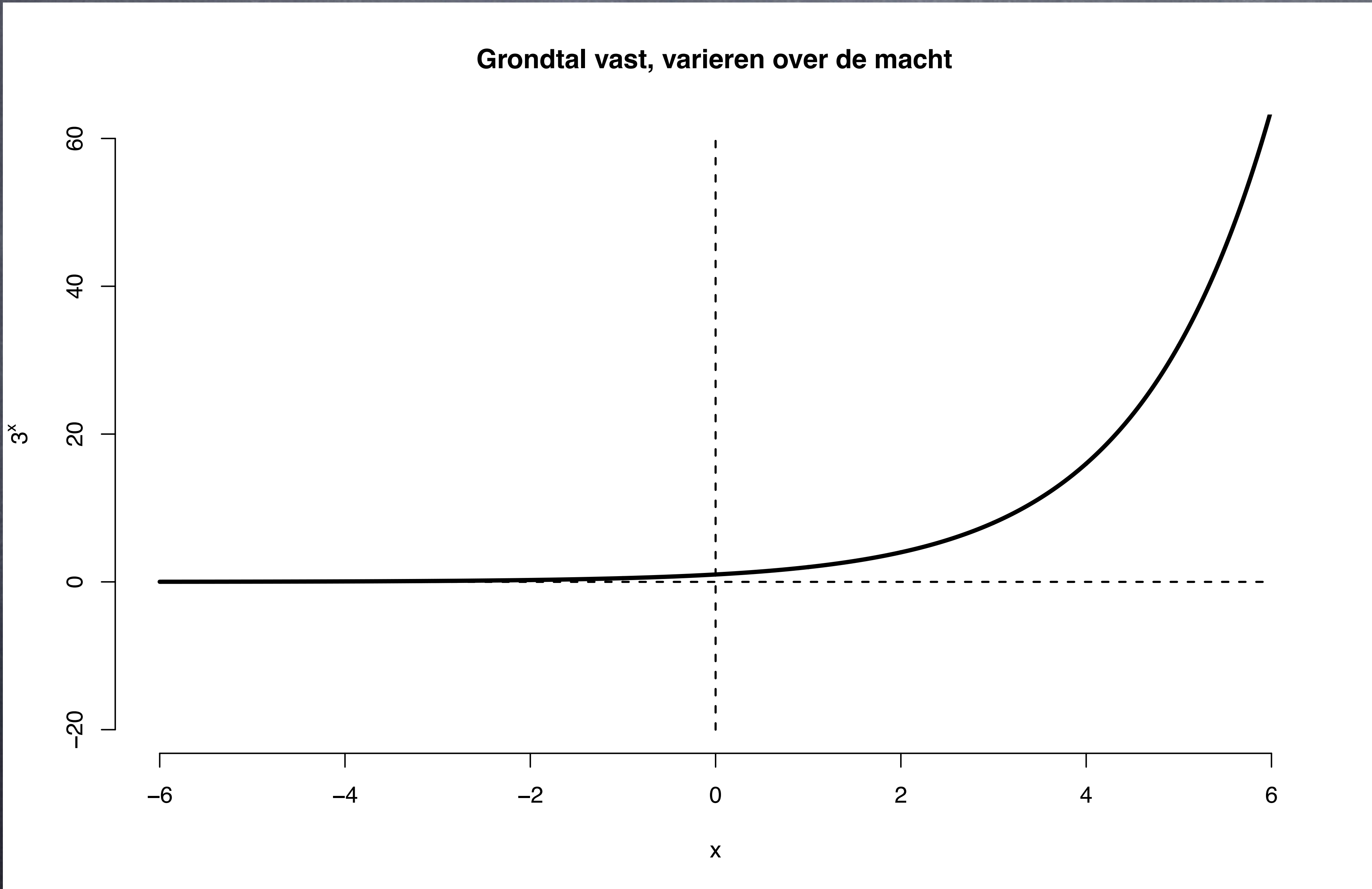
2^x: Grondtal vast varieren over de macht



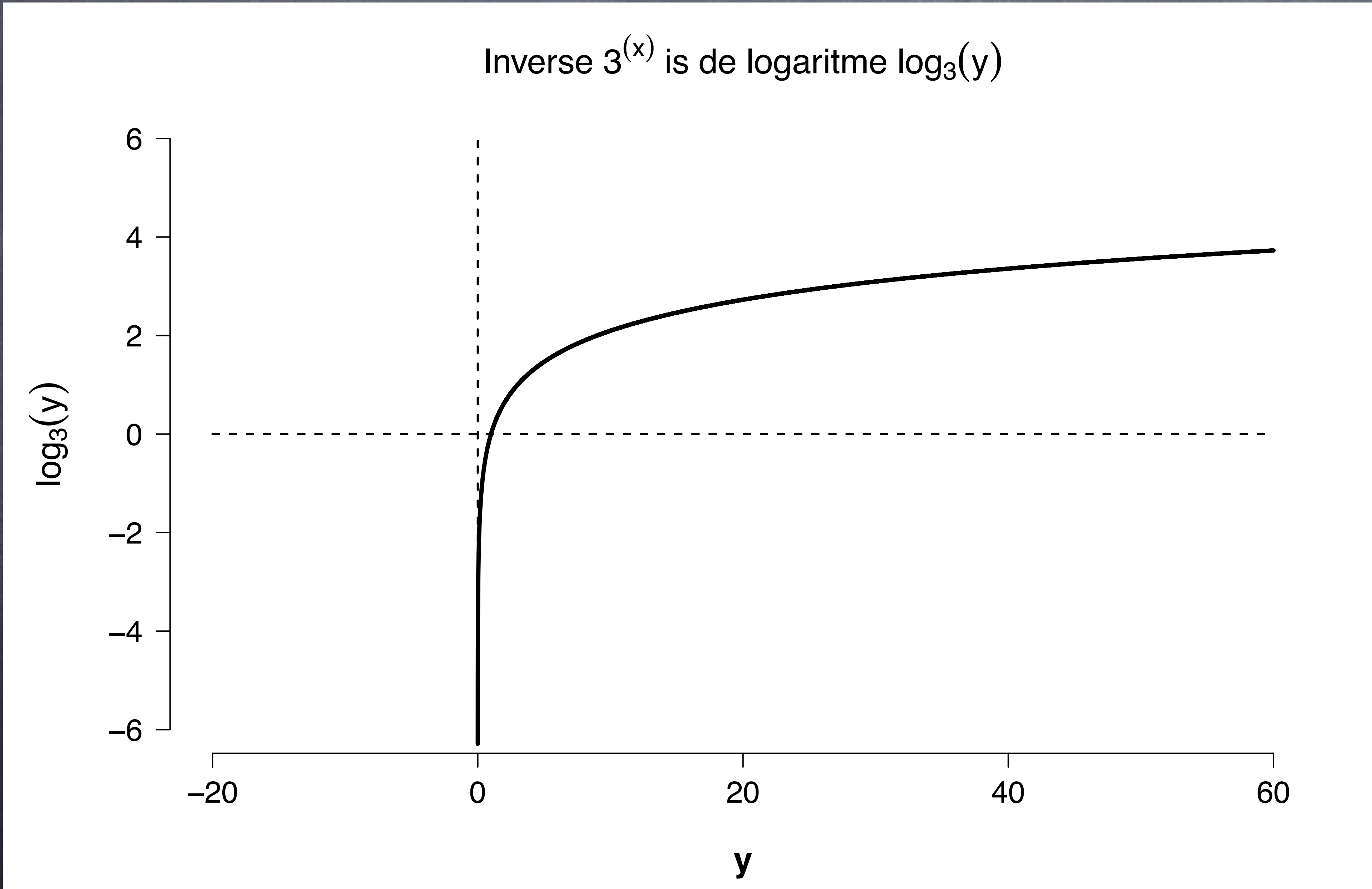
Inverse van $y=2^x$ is $\log_2(y)$



3^x: Grondtal vast varieren over de macht

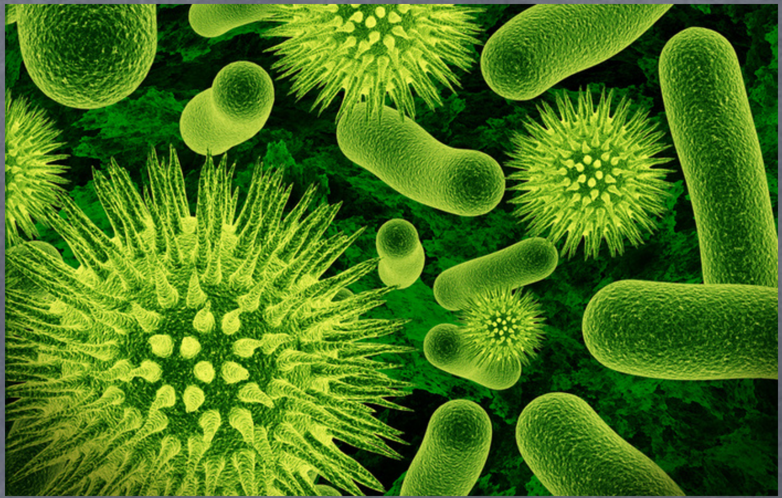


Inverse van $y=3^x$ is $\log_3(y)$



Bacterien 2^x

Een bacterie splits zich elke 20 minuten.Elke 20 minuten is er een nieuwe generatie van bacterien



- Hoeveel bacterien zijn er na 10 generaties?
- Hoeveel bacterien zijn er na 11 generaties?
- Op de 3de generatie zie ik 600 bacterien hoeveel waren het er op de 1ste?
- Hoeveel bacterien zijn er na 10,5 generaties?
- Hoeveel reproducties heb ik nodig voor 5000 bacterien als ik er met 1 begin?

Logarithm

De logarithme van een getal helpt bij vergelijkingen met een onbekende exponent

Soms zit een onbekende in een exponent

bijv. Voor welke x geldt $2^x = 5$?

De logarithme van een getal helpt bij vergelijkingen met een onbekende exponent

Soms zit een onbekende in een exponent

bijv. Voor welke x geldt $2^x = 5$?

"tot welke macht moet wordt 2 verheven om 5 te krijgen?"

Het antwoord is: de logarithme van 5 met basis 2.

d.w.z. $2^{\log_2(5)} = 5$

$\log_2(5)$ is een getal dat we op kunnen zoeken

(≈ 2.321928095)

basis van de logarithme (grondtal)

De logarithme van een getal helpt bij vergelijkingen met een onbekende exponent

Soms zit een onbekende in een exponent

Algemeen: $b^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b(y)$

een ja/nee test heeft 64 antw.patr., hoeveel items?

bijv. als $2^n = 64$ dan $n = \log_2(64) = 6$

want $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

$3^n = 27 \quad \Rightarrow n = \log_3(27) = 3$

want $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

$b^x = b \quad \Rightarrow x = \boxed{\log_b(b) = 1}$

want $b^1 = b$

Quiz

Soms zit een onbekende in een exponent

$$b^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b(y)$$

Rekenregels:

$b^{\log_b(y)} = ???$

$\log(xy) = ???$

$\log(x^y) = ???$

De logarithme van een getal helpt bij vergelijkingen met een onbekende exponent

Soms zit een onbekende in een exponent

$$b^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b(y)$$

Rekenregels:

$b^{\log_b(y)} = y$ (per definitie)

$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

want $b^{\log_b(xy)} = xy = b^{\log_b(x)}\, b^{\log_b(y)} = b^{\log_b(x)+\log_b(y)}$

$\log(x^y) = y \cdot \log(x)$

want $b^{\log_b(x^y)} = x^y = (x)^y = (b^{\log_b(x)})^y = b^{y \cdot \log_b(x)}$

De logarithme van een getal helpt bij vergelijkingen met een onbekende exponent

Soms zit een onbekende in een exponent

$$b^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b(y)$$

Rekenregels:

$b^{\log_b(y)} = y$

$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

$\log(x^y) = y \cdot \log(x)$

bijv. $2^3 = 8,\ 2^4 = 16$

$$\begin{aligned} \log_2(8) &= \log_2(2 \cdot 4) \\ &= \log_2(2) + \log(4) \\ &= 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_2(16) &= \log_2(4^2) \\ &= 2 \cdot \log_2(4) \\ &= 2 \cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

De logarithme van een getal helpt bij vergelijkingen met een onbekende exponent

Soms zit een onbekende in een exponent

$$b^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b(y)$$

Rekenregels:

$b^{\log_b(y)} = y$

$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

$\log(x^y) = y \cdot \log(x)$

bijv.

$$\log_b\left(\frac{1}{b^n}\right) = \log_b(b^{-n})$$
$$= -n \cdot \log_b(b)$$
$$= -n \cdot 1$$
$$= -n$$

De logarithme van een getal helpt bij vergelijkingen met een onbekende exponent

Soms zit een onbekende in een exponent

$$b^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b(y)$$

Rekenregels:

$b^{\log_b(y)} = y$

$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

$\log(x^y) = y \cdot \log(x)$

bijv. $2a^x - 3 = b$

$\Leftrightarrow 2a^x = 3 + b$

$\Leftrightarrow a^x = (3 + b)/2$

$\Leftrightarrow x = \log_a((3 + b)/2)$

$\therefore x = \log_a(3/2 + b/2)$

De logarithme van een getal helpt bij vergelijkingen met een onbekende exponent

Soms zit een onbekende in een exponent

$$b^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b(y)$$

Rekenregels:

$b^{\log_b(y)} = y$

$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

$\log(x^y) = y \cdot \log(x)$

bijv. $\log_b(x + a) = 3a^2 + 1$

$\Leftrightarrow b^{\log(x + a)} = b^{3a^2+1}$

$\Leftrightarrow x + a = b^{3a^2+1}$

$\Leftrightarrow x = b^{3a^2+1} - a$

$\boxed{\therefore\ x = b^{3a^2+1} - a}$

De logarithme van een getal helpt bij vergelijkingen met een onbekende exponent

Soms zit een onbekende in een exponent

$$b^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b(y)$$

Rekenregels:

$b^{\log_b(y)} = y$

$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

$\log(x^y) = y \cdot \log(x)$

$\log_b(x) + \log_b(2b-x) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \log_b(x(2b - x)) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \log_b(x(2b - x)) = 2$

$\Leftrightarrow \log_b(2bx - x^2) = 2$

$\Leftrightarrow 2bx - x^2 = b^2$

$\Leftrightarrow 0 = b^2 - 2bx + x^2$

$= (b - x)^2 \qquad \boxed{\therefore\ x = b}$

Er zijn 9 belangrijks algebra regels die je nodig hebt om vergelijkingen op te lossen

$a+b = b+a$

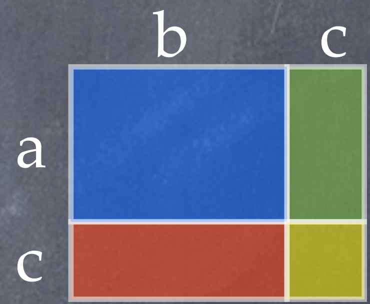
$a \cdot b = b \cdot a$

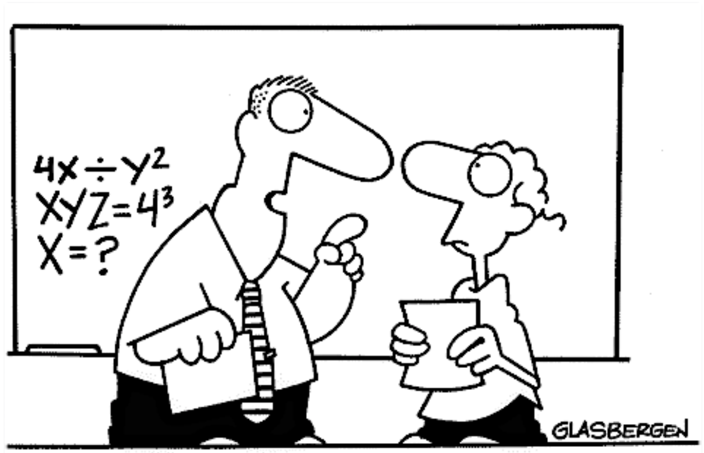
$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$(ab)^x = a^x \cdot b^x$





"Algebra class will be important to you later in life because there's going to be a test six weeks from now."

$b^{\log_b(y)} = y$

$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

$\log(x^y) = y \cdot \log(x)$

Nieuw:Simultane vergelijkingen

Simultane vergelijkingen zijn soms oplosbaar als een kwadratische vergelijking

Simultane vergelijkingen moeten tegelijk waar zijn

bijv. $\begin{cases} 3y = 2x - 4 \\ 6y = 3x + 2 \end{cases}$

oplossen gaat door y te elimineren:

herschrijf — 1e vergl. maal -2 — elimineer y

$$\begin{cases} -2x + 3y = -4 \\ -3x + 6y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 8 \\ -3x + 6y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 8 \\ -3x + 6y = 2 \end{cases}$$

$$\frac{\begin{array}{l} 4x - 6y = 8 \\ -3x + 6y = 2 \end{array}}{x \ + 0 \ = 10} \ +$$

$\therefore$ x = 10 en y = (2·10 – 4)/3 = 16/3

Simultane vergelijkingen zijn soms oplosbaar als een kwadratische vergelijking

Simultane vergelijkingen moeten tegelijk waar zijn

bijv. $\begin{cases} 2y = -5x + 1 \\ 5y = -15x + 10 \end{cases}$

oplossen gaat door y te elimineren:

herschrijf — 2e vergl. maal -2/5 — elimineer y

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 15x + 5y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ -6x - 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ -6x - 2y = -4 \end{cases}$$

$$\underline{}\;+$$

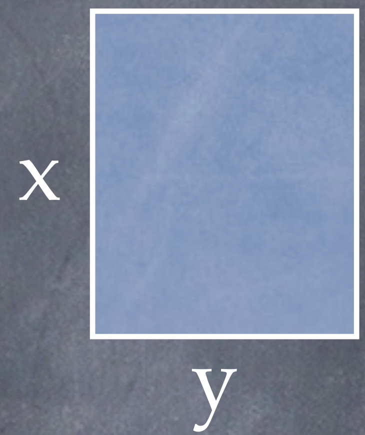
$$-x \;\; + 0 \;\; = -3$$

$$\therefore\; x = 3 \text{ en } y = (-5 \cdot 3 + 1)/2 = -7$$

Simultane vergelijkingen zijn soms oplosbaar als een kwadratische vergelijking

Simultane vergelijkingen moeten tegelijk waar zijn

bijv. $\begin{cases} x + y = 4 \\ x \cdot y = 3 \end{cases}$



Opp. = 3

Omtr. = 8

Er is geen systematische manier...

van 1e vergl.: $y = 4 - x$

invullen in 2e vergl.: $x \cdot (4 - x) = 3$

vereenvoudigen: $-x^2 + 4x - 3 = 0$

abc-formule: $x_{\pm} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = 2 \pm 1$