

Wiskunde Module

Basisprogramma Psychologische Methodenleer
Alexander Ly (Raoul Grasman)

We behandelen voornamelijk algebra en differentiëren van functies



vr	algebra: rekenregels
ma	functies, 1e & 2e orde polynomen, log
wo	functies, afgeleiden, differentiëren
vr	differentiëren en integreren
ma	matrix algebra (?)

Programma vandaag

- **Samenvatting: functies**
- Herhaling functies:
- Continuïteit
- Concept differentiëren
- Differentiatie regels (optellen, vermenigvuldiging)
- Differentiatie regels (samengestelde functies en speciale functies $\exp$ en $\ln$)

We hebben de volgende functies gezien en wat eigenschappen van besproken

We bespreken vijf elementaire functies:

- polynomen (veeltermen) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$
- rationale functies $f(x) = \frac{x + 4}{x^2 + x - 4}$
- absolute waarde functie $f(x) = |x|$
- exponentiële functie $f(x) = a^x$
- faculteit functie $f(n) = n!$

“Voorwaarts”

Inverse

- $f(x) = x + a = y$

- $f^{-1}(y) = y - a$

- $f(x) = a x = y$

- $f^{-1}(y) = y / a$

- $f(x) = x^2 = y$

- $f^{-1}(y) = y^{1/2}$

- $f(x) = x^r = y$

- $f^{-1}(y) = y^{1/r}$

- $f(x) = a^x = y$

- $f^{-1}(x) = \log_a(y)$

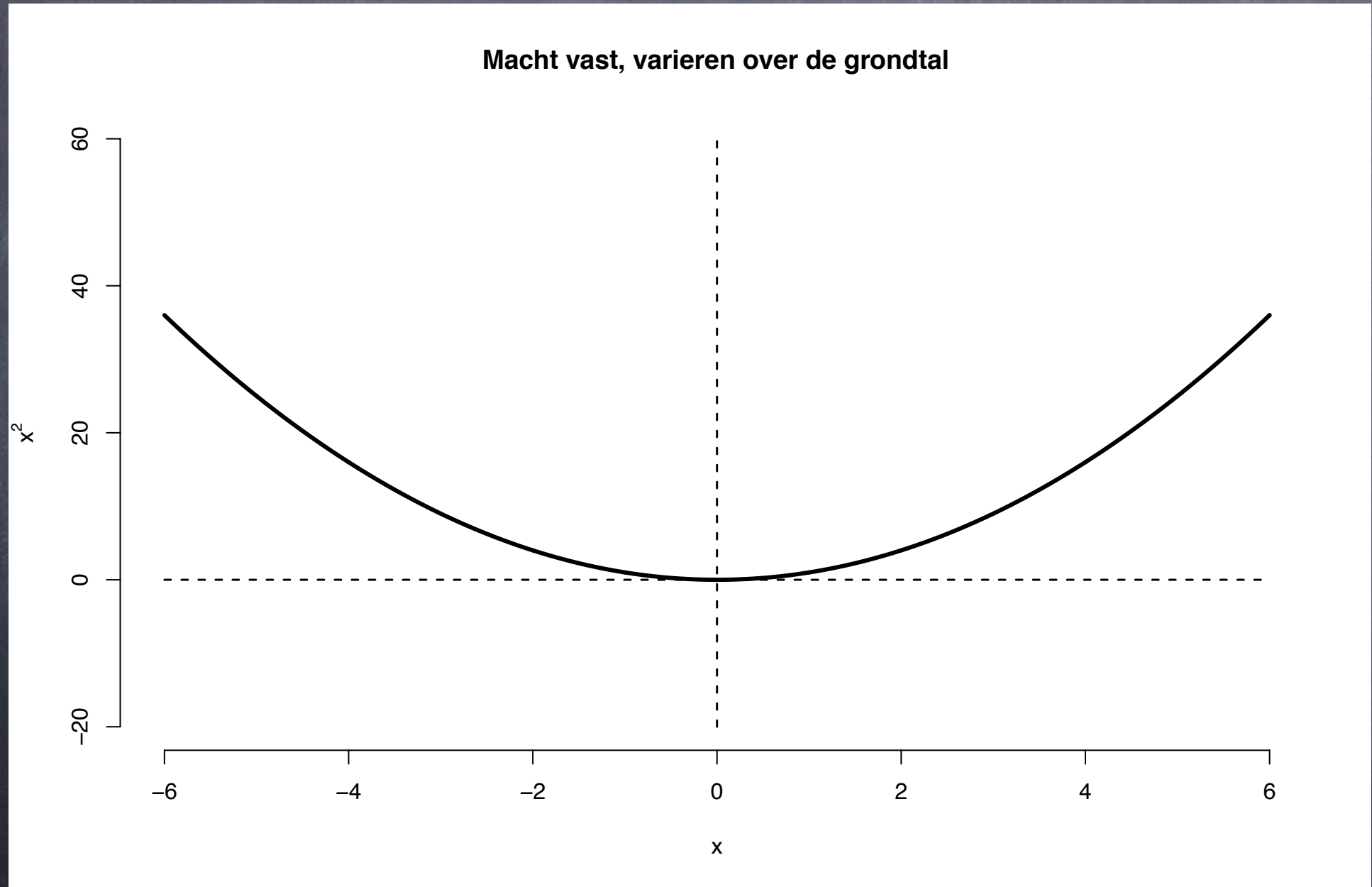
grondtal^{macht}=“uitkomst”

grondtal	macht	“uitkomst”	vb
Gegeven	Gegeven	Onbekend	$y=3^2$
Onbekend	Gegeven	Gegeven	$3=a^2$
Gegeven	Onbekend	Gegeven	$64=2^x$

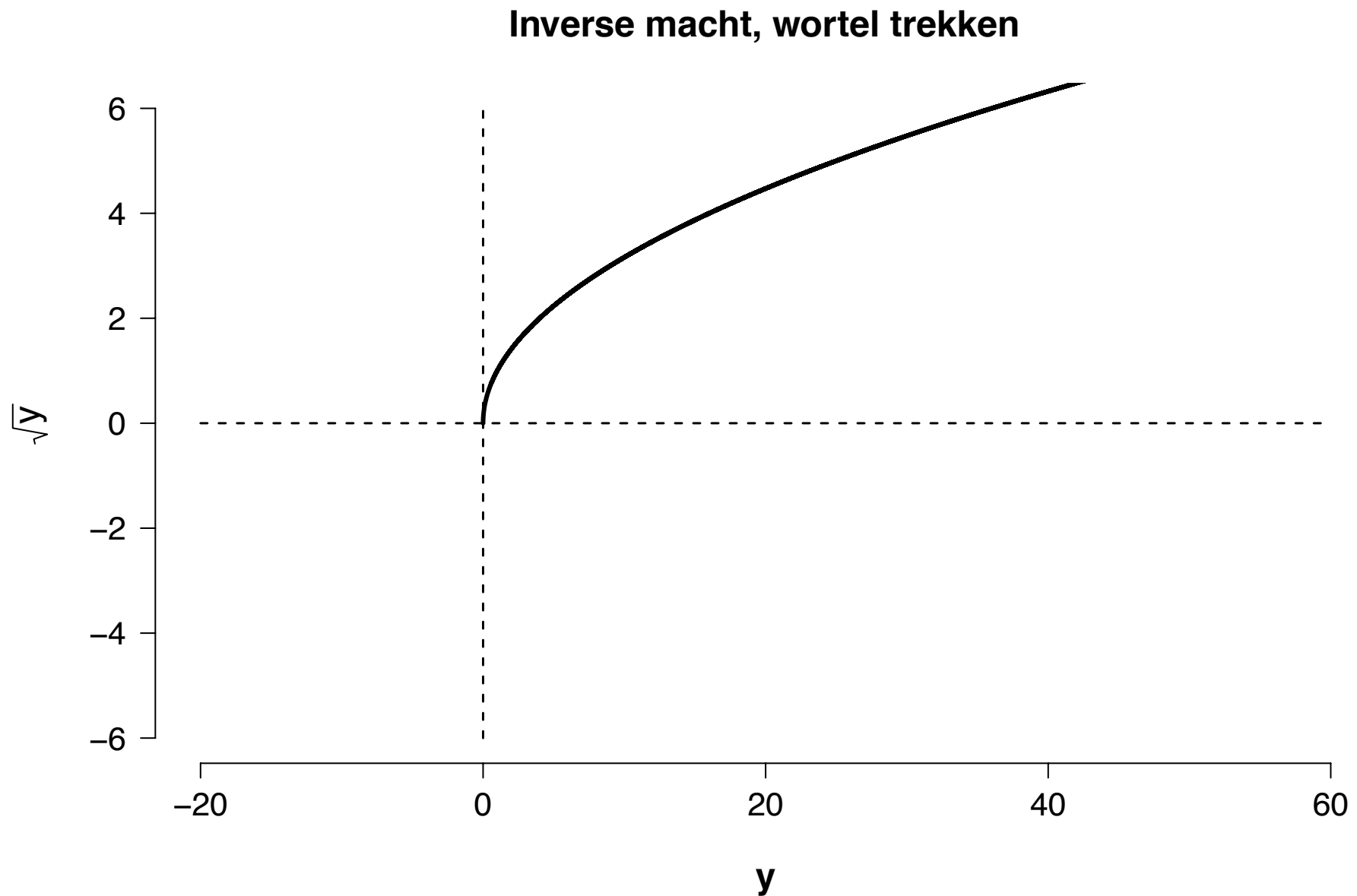
grondtal^{macht}=“uitkomst”

grondtal	macht	“uitkomst”	vb
Gegeven	Gegeven	Onbekend	$y=3^2$
Onbekend	Gegeven	Gegeven	$3=a^2$
Gegeven	Onbekend	Gegeven	$64=2^x$

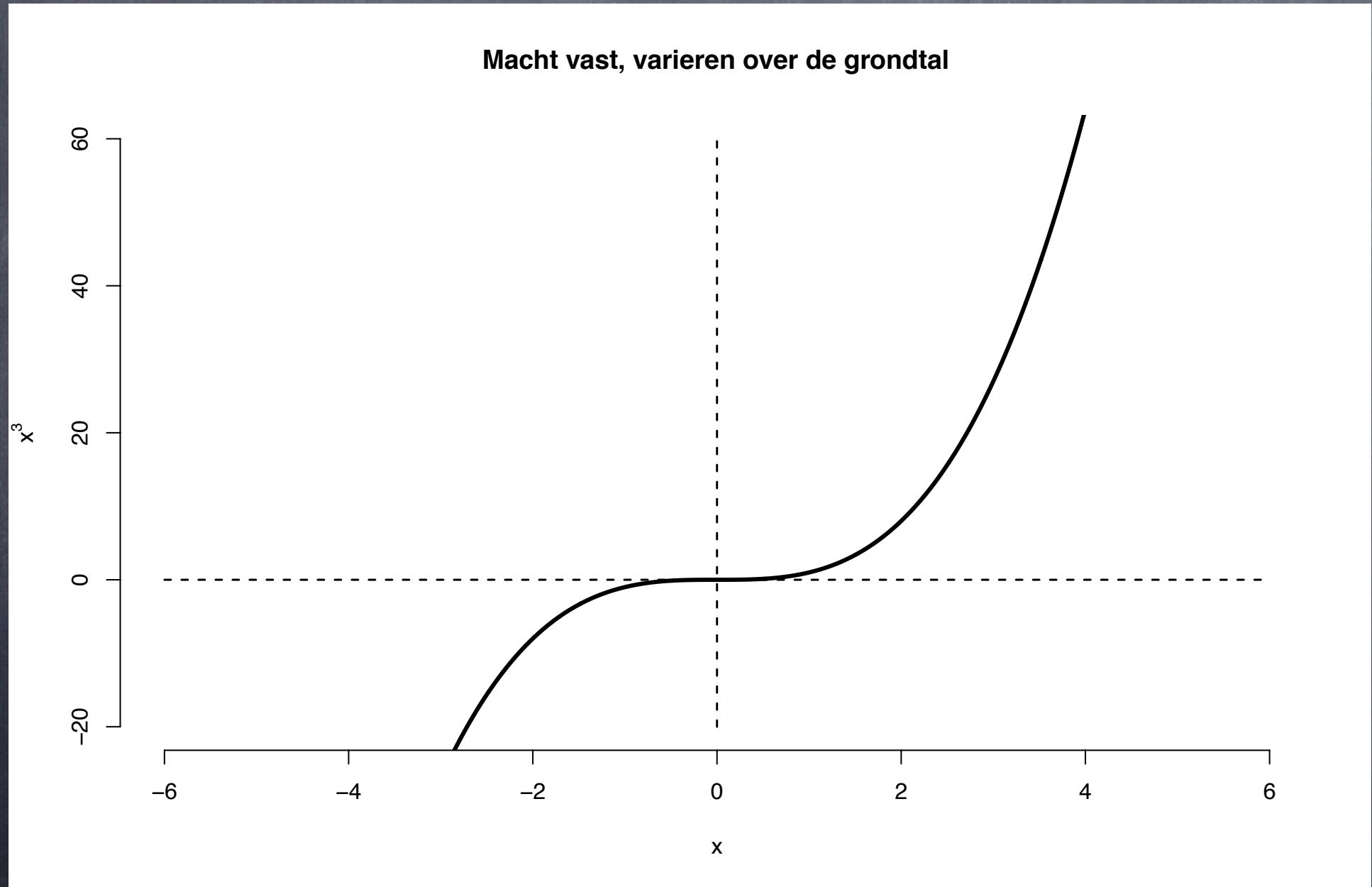
x^2 : Macht vast variëren over de grondtal



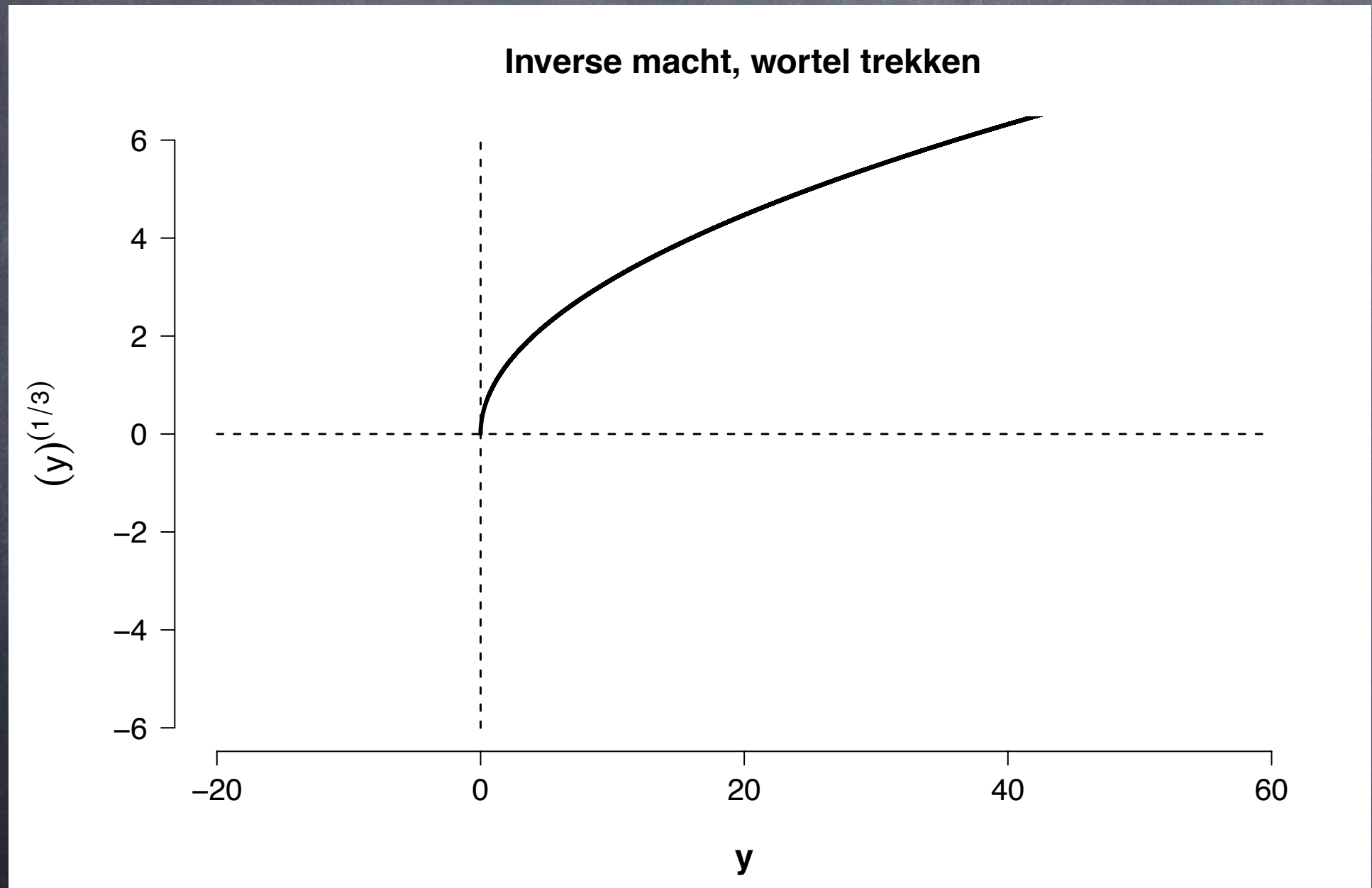
Inverse van $y=x^2$ is $y^{1/2}$



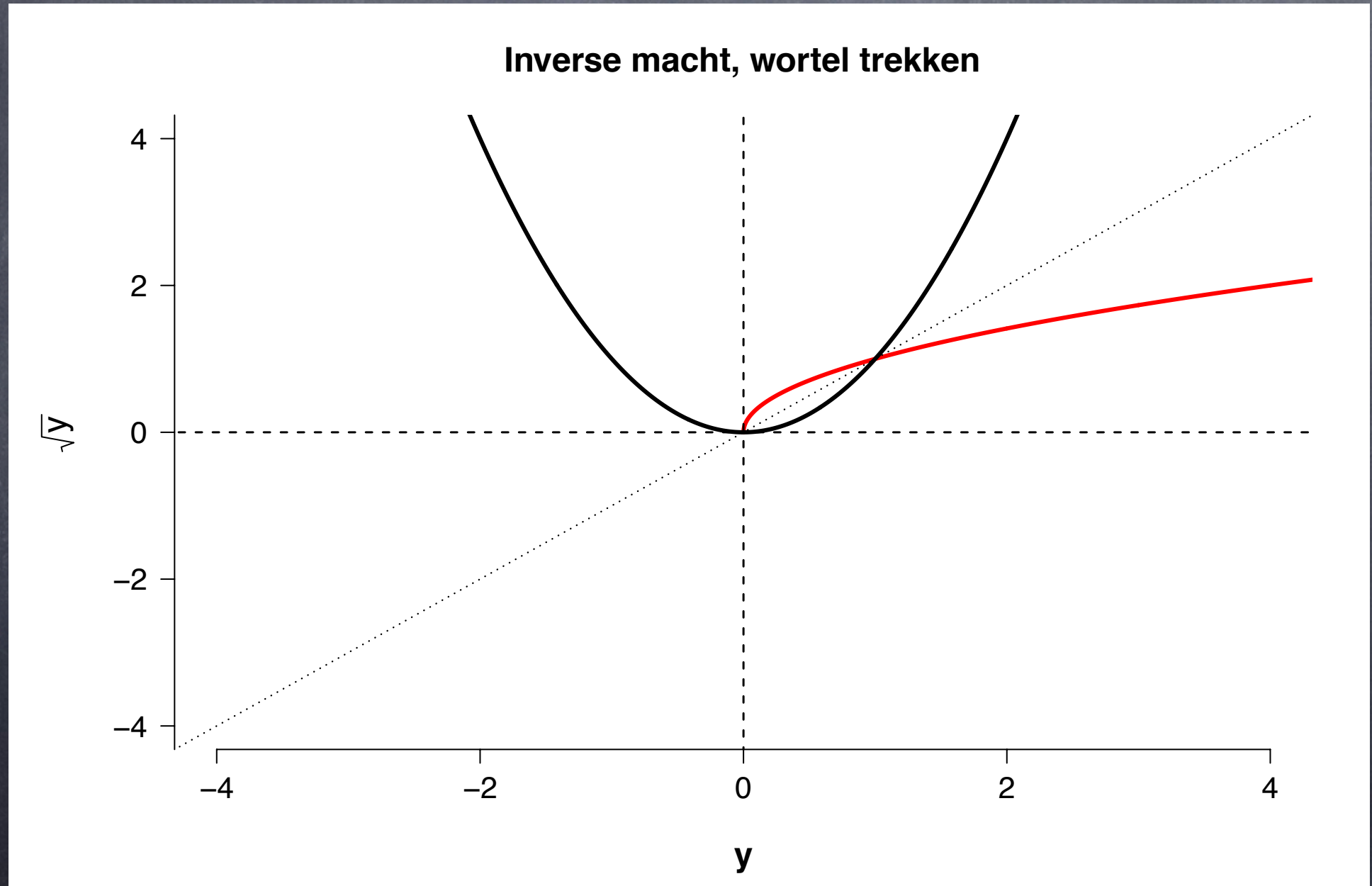
x^3 : Macht vast variëren over de grondtal



Inverse van $y=x^3$ is $y^{1/3}$



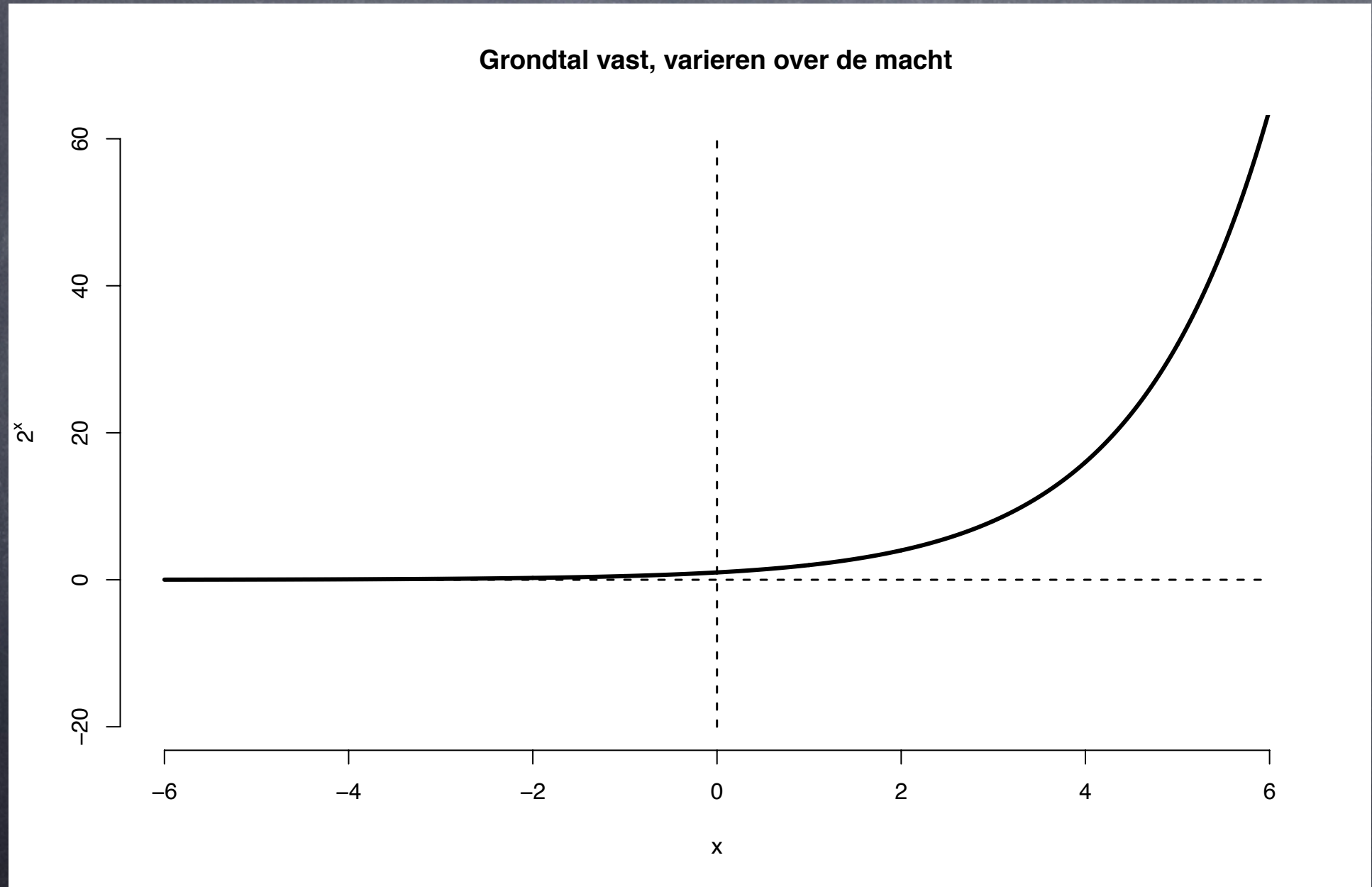
Inverse functie is gespiegeld in $y=x$



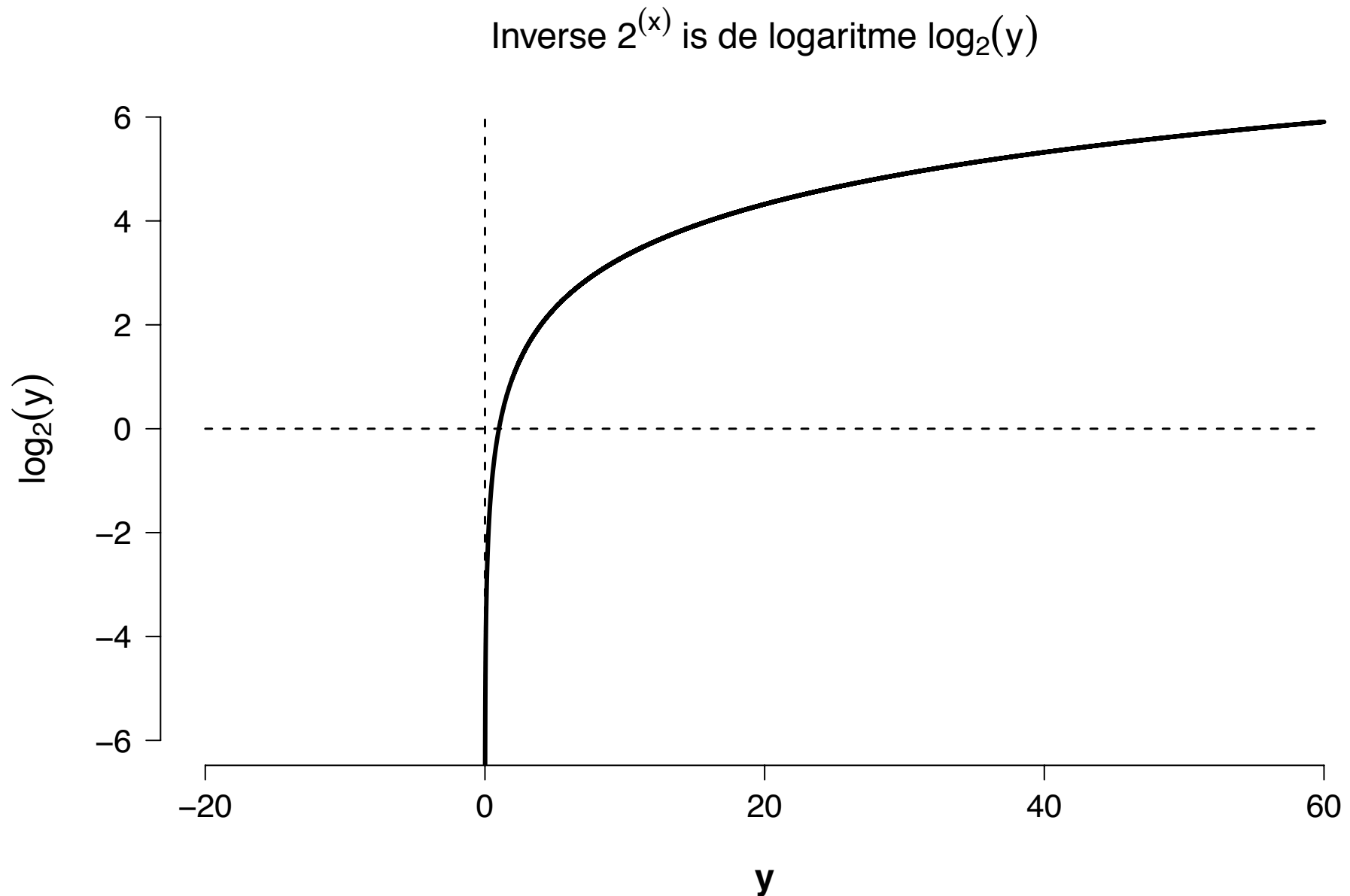
grondtal^{macht}=“uitkomst”

grondtal	macht	“uitkomst”	vb
Gegeven	Gegeven	Onbekend	$y=3^2$
Onbekend	Gegeven	Gegeven	$3=a^2$
Gegeven	Onbekend	Gegeven	$64=2^x$

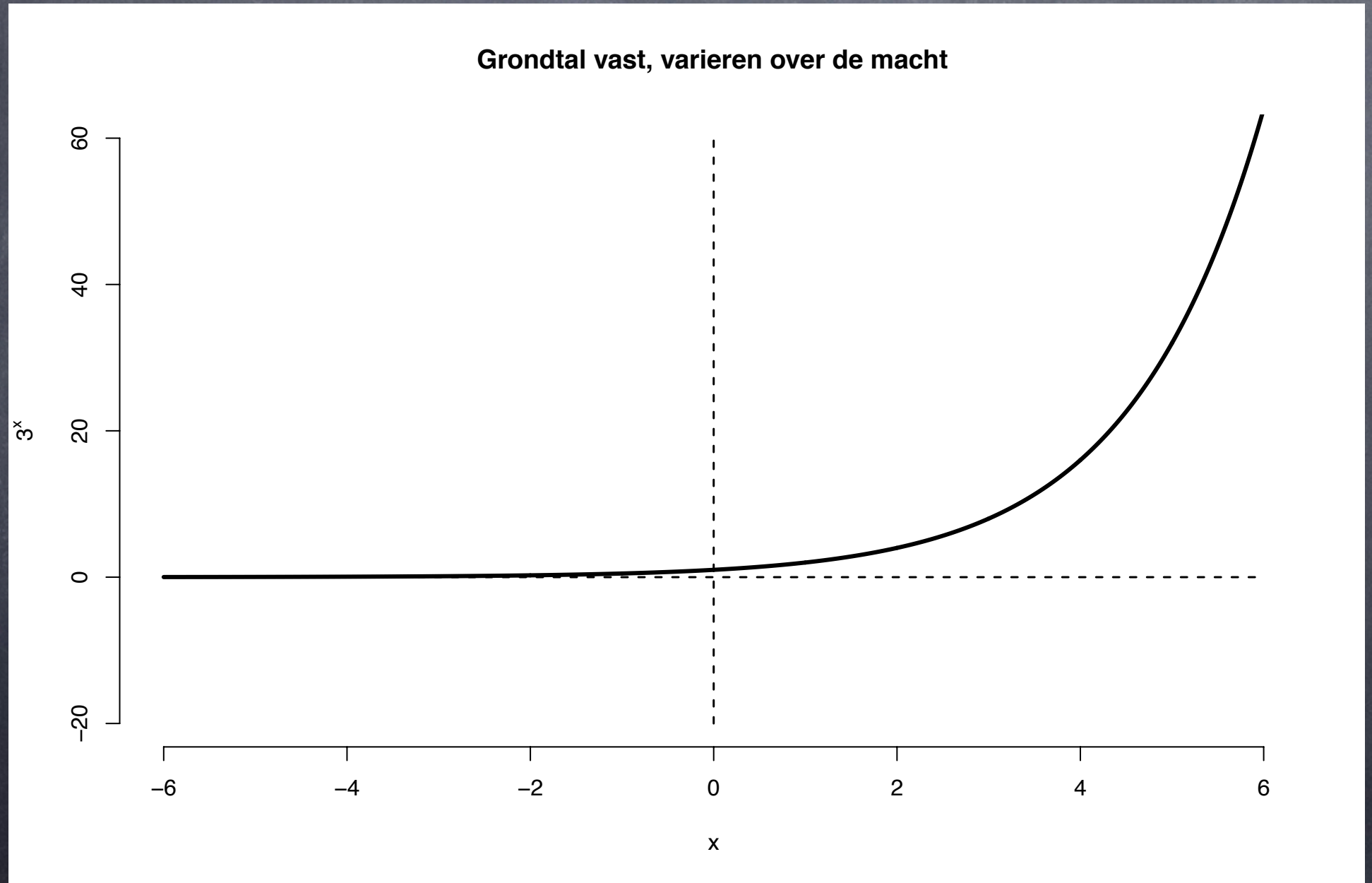
2^x : Grondtal vast, variëren over de macht



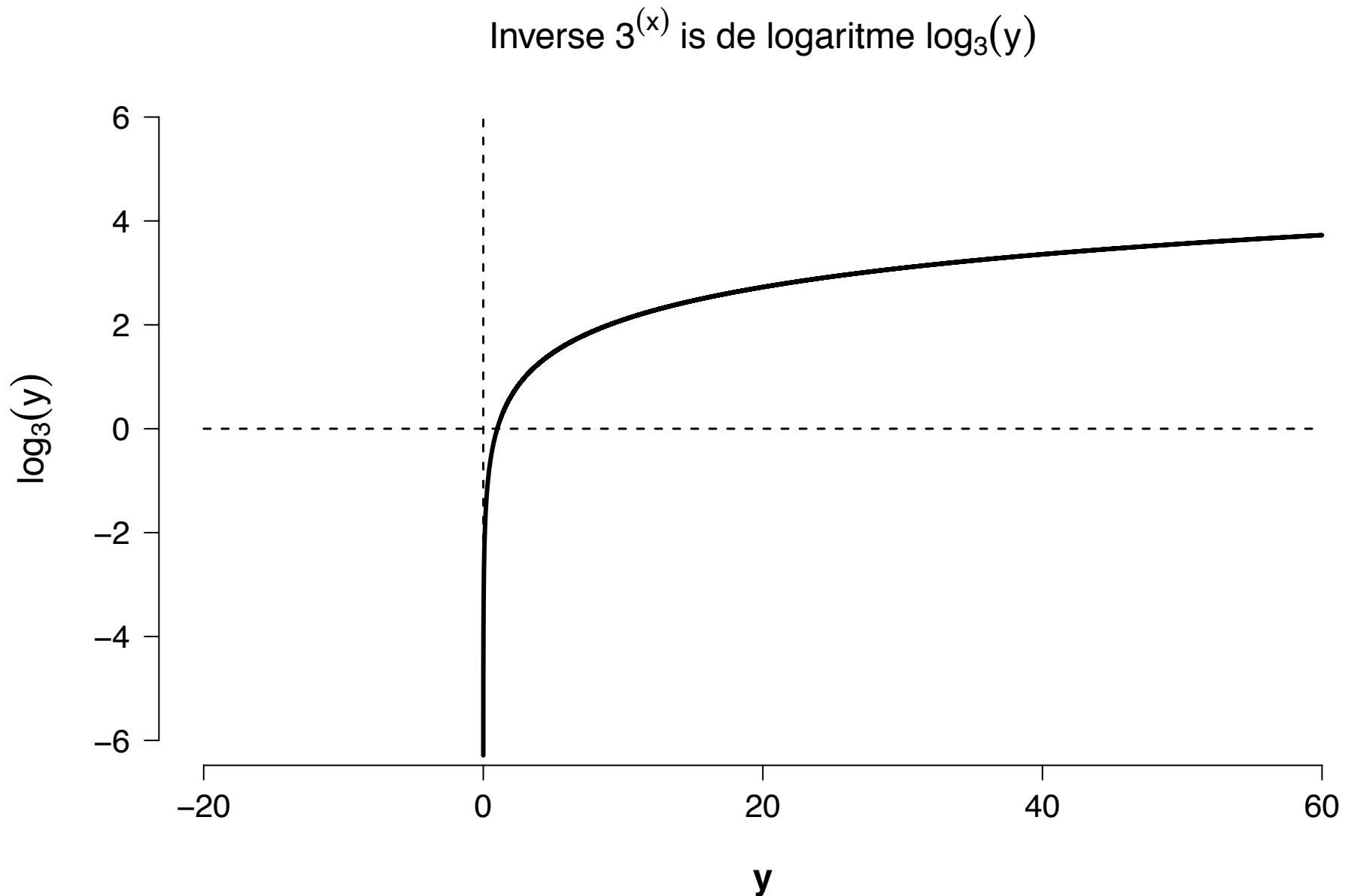
Inverse van $y=2^x$ is $\log_2(y)$



3^x : Grondtal vast variëren over de macht

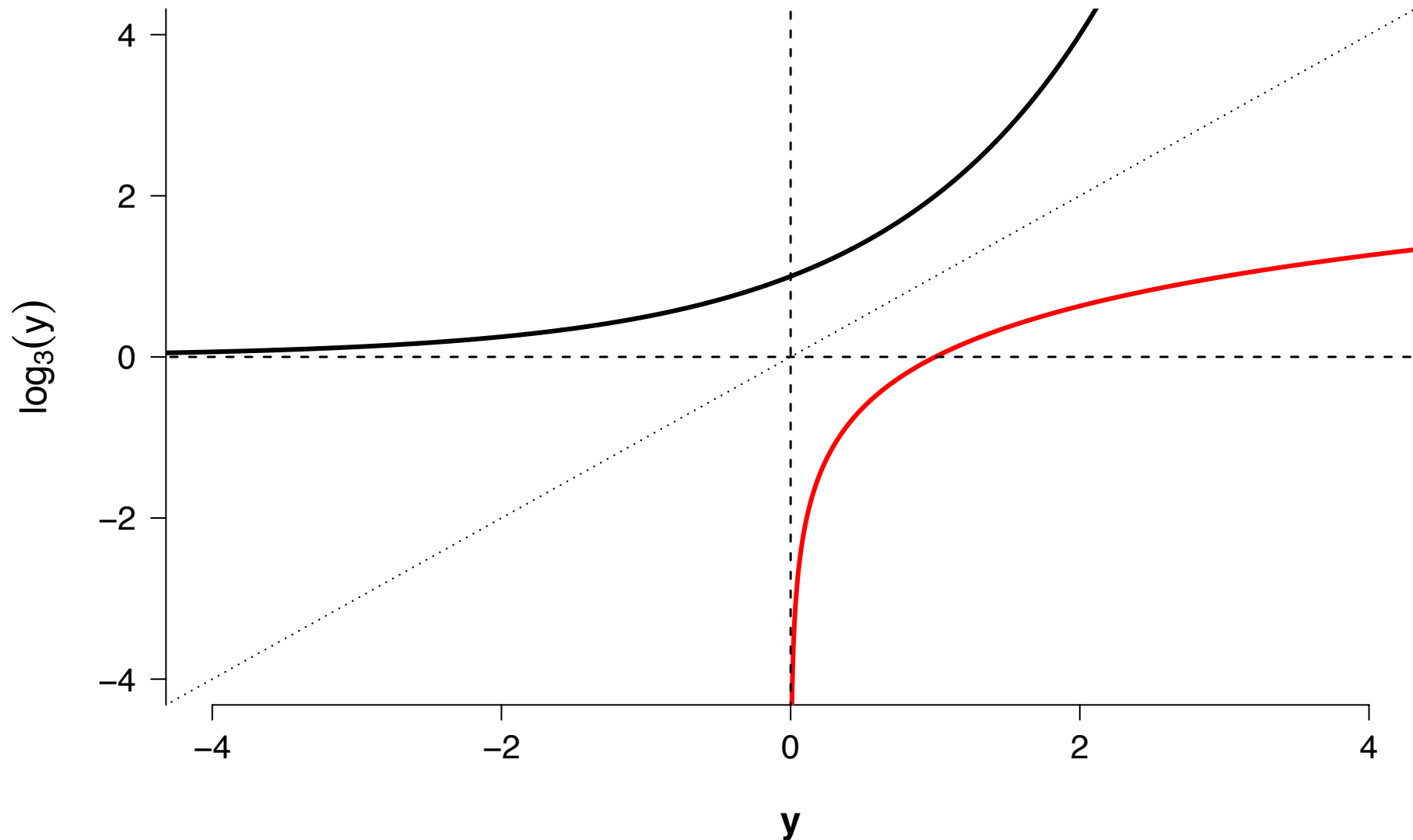


Inverse van $y=3^x$ is $\log_3(y)$



Inverse functie is gespiegeld in $y=x$

Inverse $3^{(x)}$ is de logaritme $\log_3(y)$



Er zijn 9 belangrijks algebra regels die je nodig hebt om vergelijkingen op te lossen

$$a+b = b+a$$

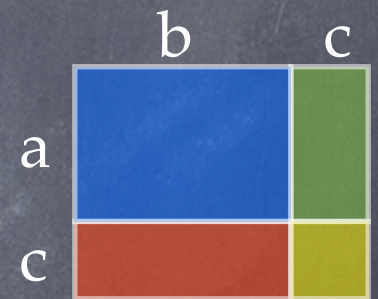
$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

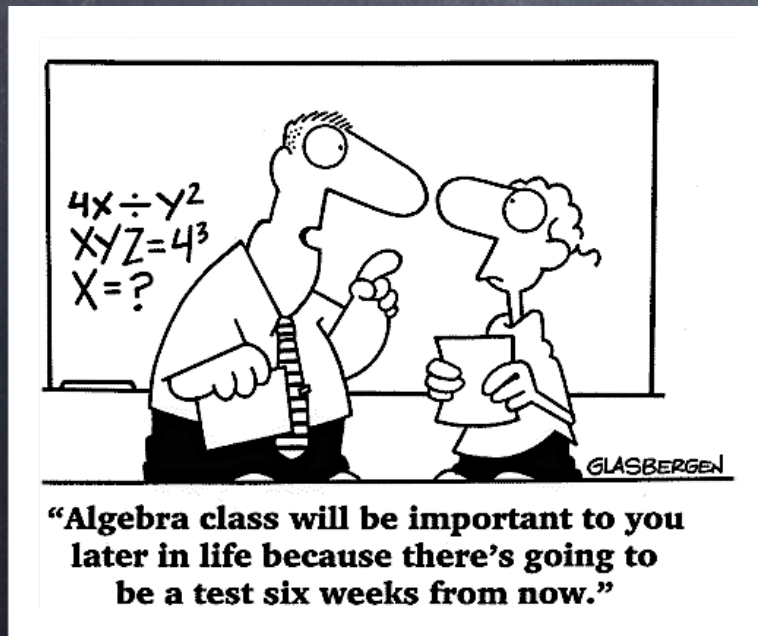
$$(ab)^x = a^x \cdot b^x$$



$$b^{\log_b(y)} = y$$

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

$$\log(x^y) = y \cdot \log(x)$$



Logarithm



De logarithme van een getal helpt bij
vergelijkingen met een onbekende exponent

Soms zit een onbekende in een exponent

bijv. Voor welke x geldt $2^x = 5$?

De logaritmie van een getal helpt bij vergelijkingen met een onbekende exponent

Soms zit een onbekende in een exponent

bijv. Voor welke x geldt $2^x = 5$?

“tot welke macht moet wordt 2 verheven om 5 te krijgen?”

Het antwoord is: de logaritmie van 5 met basis 2.

$$\text{d.w.z. } 2^{\log_2(5)} = 5$$

$\log_2(5)$ is een getal dat we op kunnen zoeken

basis van de logaritmie(grondtal)

(≈ 2.321928095)

De logarithme van een getal helpt bij vergelijkingen met een onbekende exponent

Soms zit een onbekende in een exponent

Algemeen: $b^x = y \Leftrightarrow x = \log_b(y)$

een ja/nee test heeft 64 antw.pat., hoeveel items?

bijv. als $2^n = 64$ dan $n = \log_2(64) = 6$

want $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

$3^n = 27 \Rightarrow n = \log_3(27) = 3$

want $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

$b^x = b \Rightarrow x = \boxed{\log_b(b) = 1}$

want $b^1 = b$

Quiz

Soms zit een onbekende in een exponent

$$b^x = y \Leftrightarrow x = \log_b(y)$$

Rekenregels:

$$b^{\log_b(y)} = ???$$

$$\log(xy) = ???$$

$$\log(x^y) = ???$$

De logaritmie van een getal helpt bij vergelijkingen met een onbekende exponent

Soms zit een onbekende in een exponent

$$b^x = y \Leftrightarrow x = \log_b(y)$$

Rekenregels:

$$b^{\log_b(y)} = y \quad (\text{per definitie})$$

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

$$\text{want } b^{\log_b(xy)} = xy = b^{\log_b(x)} b^{\log_b(y)} = b^{\log_b(x) + \log_b(y)}$$

$$\log(x^y) = y \cdot \log(x)$$

$$\text{want } b^{\log_b(x^y)} = x^y = (x)^y = (b^{\log_b(x)})^y = b^{y \cdot \log_b(x)}$$

De logaritmie van een getal helpt bij vergelijkingen met een onbekende exponent

Soms zit een onbekende in een exponent

$$b^x = y \Leftrightarrow x = \log_b(y)$$

Rekenregels:

$$b^{\log_b(y)} = y$$

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

$$\log(x^y) = y \cdot \log(x)$$

bijv. $2^3 = 8, 2^4 = 16$

$$\begin{aligned}\log_2(8) &= \log_2(2 \cdot 4) \\ &= \log_2(2) + \log_2(4) \\ &= 1 + 2 = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_2(16) &= \log_2(4^2) \\ &= 2 \cdot \log_2(4) \\ &= 2 \cdot 2 = 4\end{aligned}$$

De logaritmie van een getal helpt bij vergelijkingen met een onbekende exponent

Soms zit een onbekende in een exponent

$$b^x = y \Leftrightarrow x = \log_b(y)$$

Rekenregels:

$$b^{\log_b(y)} = y$$

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

$$\log(x^y) = y \cdot \log(x)$$

bijv.

$$\begin{aligned} \log_b\left(\frac{1}{b^n}\right) &= \log_b(b^{-n}) \\ &= -n \cdot \log_b(b) \\ &= -n \cdot 1 \\ &= -n \end{aligned}$$

De logaritmme van een getal helpt bij vergelijkingen met een onbekende exponent

Soms zit een onbekende in een exponent

$$b^x = y \Leftrightarrow x = \log_b(y)$$

Rekenregels:

$$b^{\log_b(y)} = y$$

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

$$\log(x^y) = y \cdot \log(x)$$

bijv. $2a^x - 3 = b$

$$\Leftrightarrow 2a^x = 3 + b$$

$$\Leftrightarrow a^x = (3 + b)/2$$

$$\Leftrightarrow x = \log_a((3 + b)/2)$$

$$\therefore x = \log_a(3/2 + b/2)$$

De logaritmie van een getal helpt bij vergelijkingen met een onbekende exponent

Soms zit een onbekende in een exponent

$$b^x = y \Leftrightarrow x = \log_b(y)$$

Rekenregels:

$$b^{\log_b(y)} = y$$

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

$$\log(x^y) = y \cdot \log(x)$$

bijv. $\log_b(x + a) = 3a^2 + 1$

$$\Leftrightarrow b^{\log(x + a)} = b^{3a^2+1}$$

$$\Leftrightarrow x + a = b^{3a^2+1}$$

$$\Leftrightarrow x = b^{3a^2+1} - a$$

$$\boxed{\therefore x = b^{3a^2+1} - a}$$

De logaritmie van een getal helpt bij vergelijkingen met een onbekende exponent

Soms zit een onbekende in een exponent

$$b^x = y \Leftrightarrow x = \log_b(y)$$

Rekenregels:

$$b^{\log_b(y)} = y$$

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

$$\log(x^y) = y \cdot \log(x)$$

$$\log_b(x) + \log_b(2b-x) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_b(x(2b-x)) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_b(x(2b-x)) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_b(2bx - x^2) = 2$$

$$\Leftrightarrow 2bx - x^2 = b^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = b^2 - 2bx + x^2$$

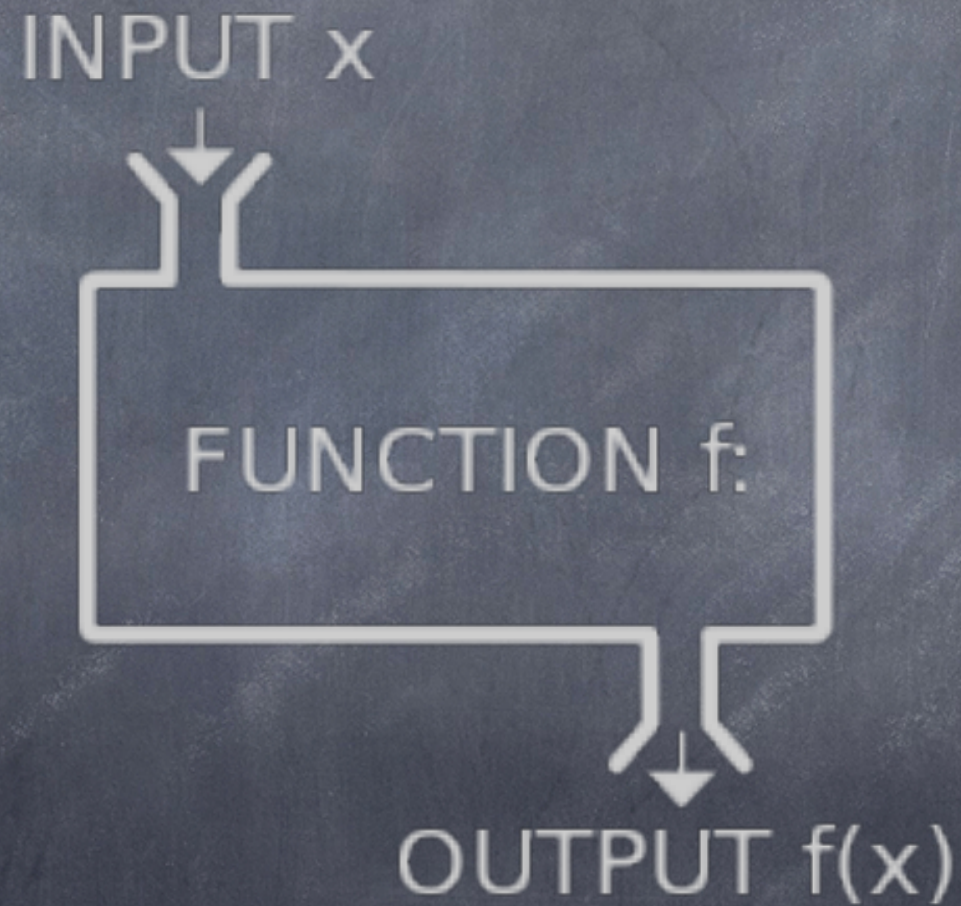
$$= (b-x)^2$$

$$\boxed{\therefore x = b}$$

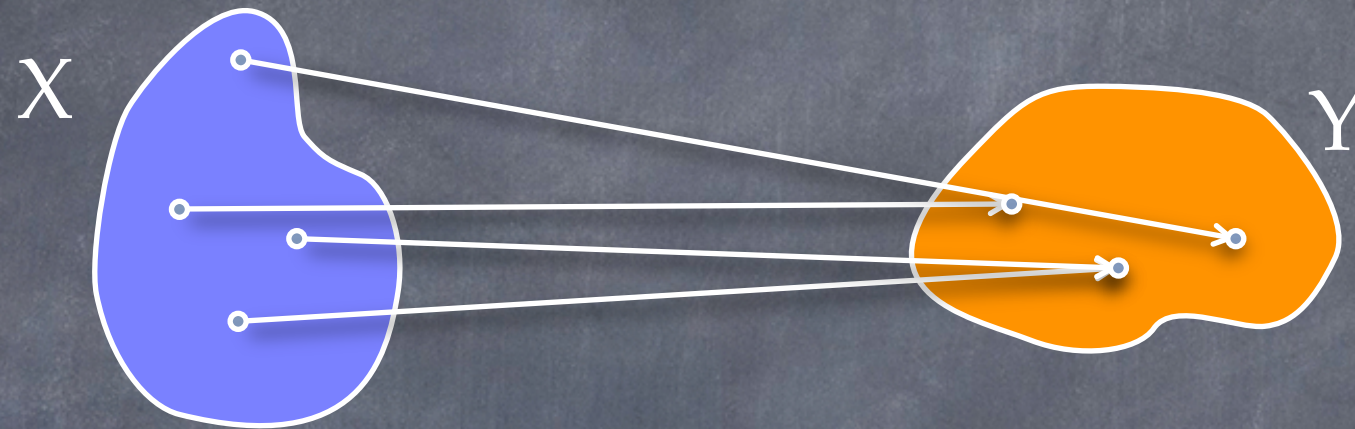
Programma vandaag

- Samenvatting
- **Samengestelde functies**
- Continuïteit
- Concept differentiëren
- Differentiatie regels (optellen, vermenigvuldiging)
- Differentiatie regels
(samengestelde functies en speciale functies $\exp$ en $\ln$)

Functions



Formeel zijn functies afbeeldingen van de ene verzameling op de andere



$$f: X \rightarrow Y$$

X, Y collectie getallen

In statistiek bevat X 'subjects' of dingen, en Y getallen

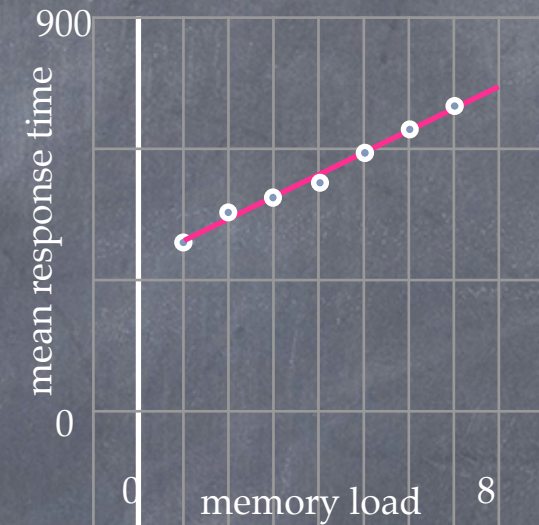


Functies zijn fundamenteel voor het beschrijven van relaties in empirische data

Sternberg ('64):

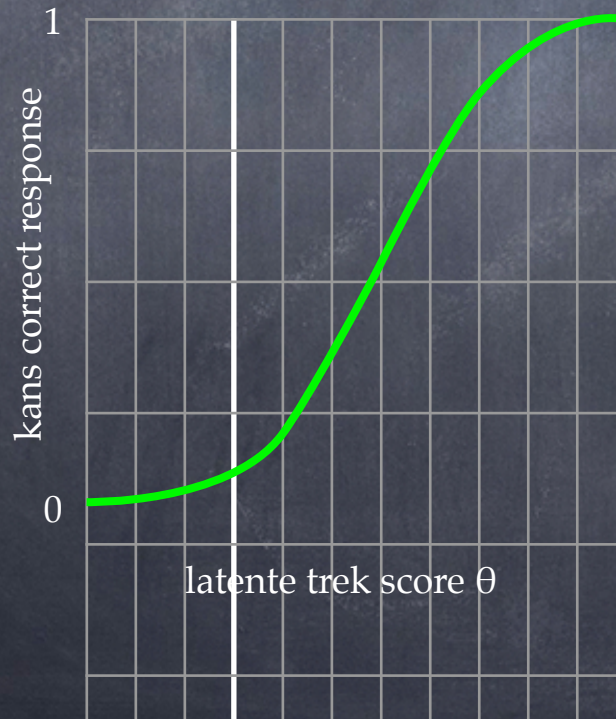
$$RT \approx 38 \cdot N + 397$$

N is # items in geheugen



IRT

$$\frac{e^{a(\theta-b)}}{1 + e^{a(\theta-b)}}$$

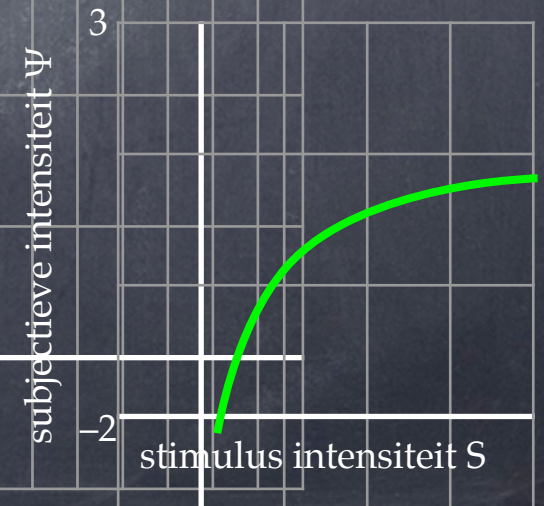


Wet van Weber

$$\Delta \Psi = k \frac{\Delta S}{S}$$

$\Downarrow$

$$\Psi = k \cdot \log(S)$$



Elementaire functies kunnen worden gecombineerd tot meer complexe functies

voor de handliggende combinaties van functies:

bijv.: $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$

som: $k(x) = (f + g)(x)$

$$k(x) = x^2 + 3x$$

verschil: $k(x) = (f - g)(x)$

$$k(x) = x^2 - 3x$$

product: $k(x) = (f \cdot g)(x)$

$$k(x) = (x^2)(3x) = 3x^3$$

quotient: $k(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$$k(x) = x^2 / 3x = \frac{1}{3}x$$

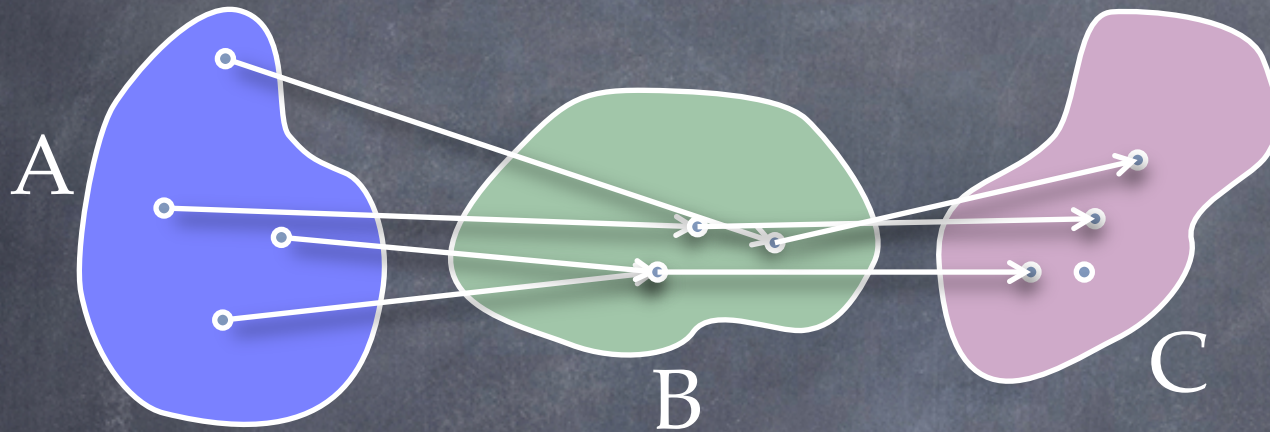
helemaal belangrijk zijn samengestelde functies

$$k(x) = (f \bullet g)(x) = f(g(x))$$

$$k(x) = (3x)^2 = 9x^2$$

In een samengestelde functie wordt ene functie toegepast op de waarde van de andere

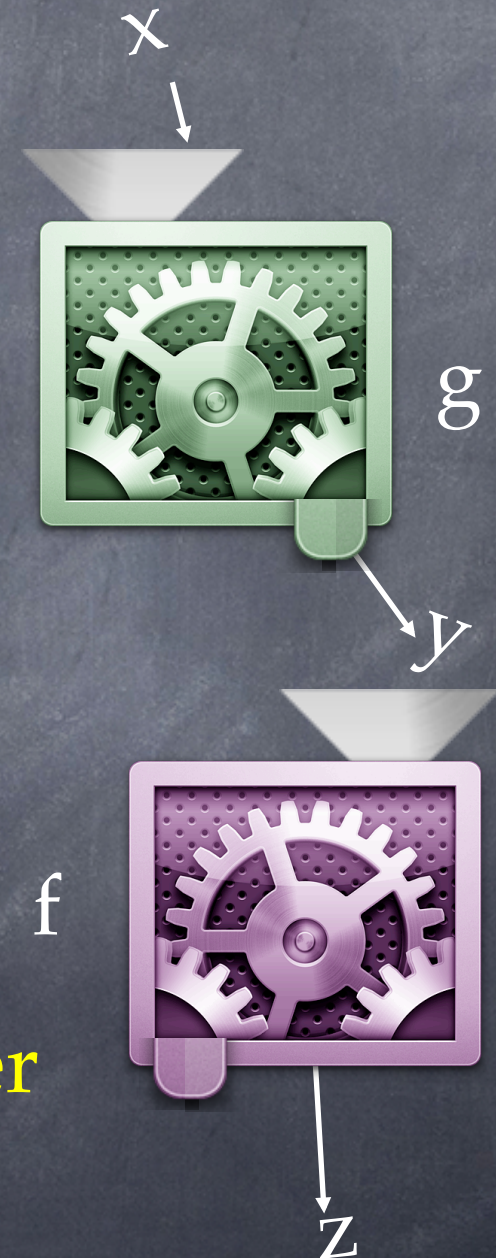
$$k(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$



$$g: X \rightarrow Y \quad f: Y \rightarrow Z$$

Voorbeeld:

Hoe meer tijd ik investeer in het oefenen van het tentamen, hoe hoger mijn eindcijfer, hoe hoger mijn toekomstige carrière kansen



In een samengestelde functie wordt ene functie toegepast op de waarde van de andere

$$k(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

voorb.

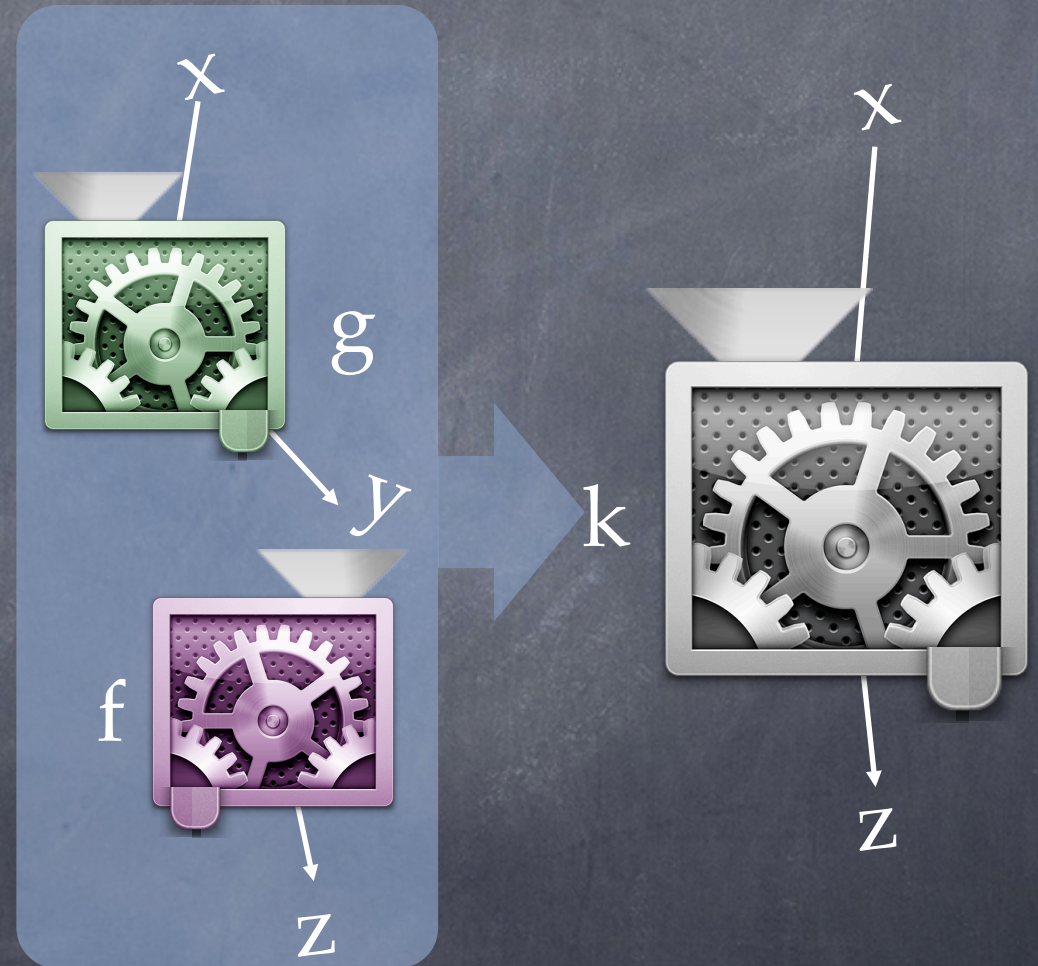
$$f(x) = (x + 2)^2$$

$$g(x) = x^3$$

$$\begin{aligned} k(x) &= f(g(x)) \\ &= (g(x) + 2)^2 \\ &= (x^3 + 2)^2 \end{aligned}$$

merk op:

$$l(x) = g(f(x)) = (f(x))^3 = ((x + 2)^2)^3 = (x + 2)^6 \neq k(x)$$



In een samengestelde functie wordt ene functie toegepast op de waarde van de andere

$$k(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

voorb.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = x + 1$$

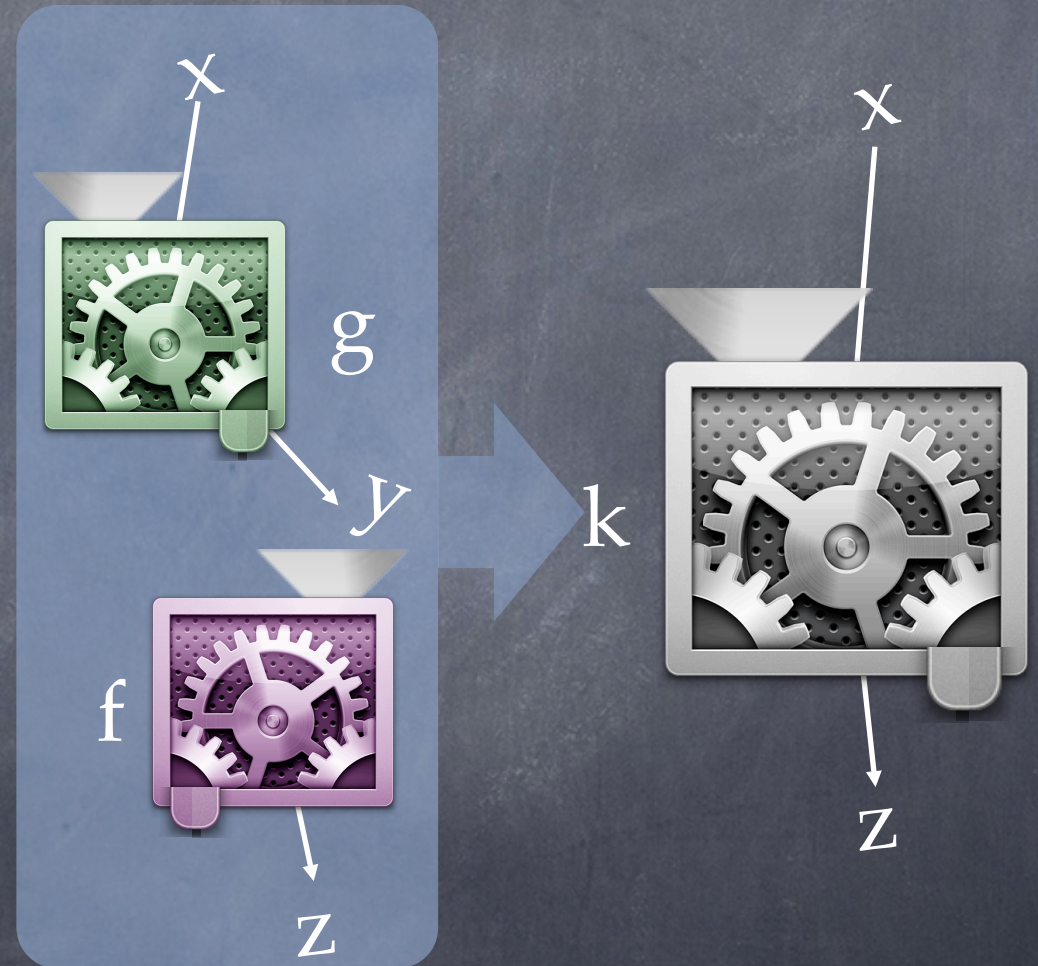
$$k(x) = f(g(x))$$

$$= \sqrt{g(x)}$$

$$= \sqrt{x + 1}$$

niet:

$$l(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1 \neq k(x)$$



In een samengestelde functie wordt ene functie toegepast op de waarde van de andere

$$k(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

voorb.

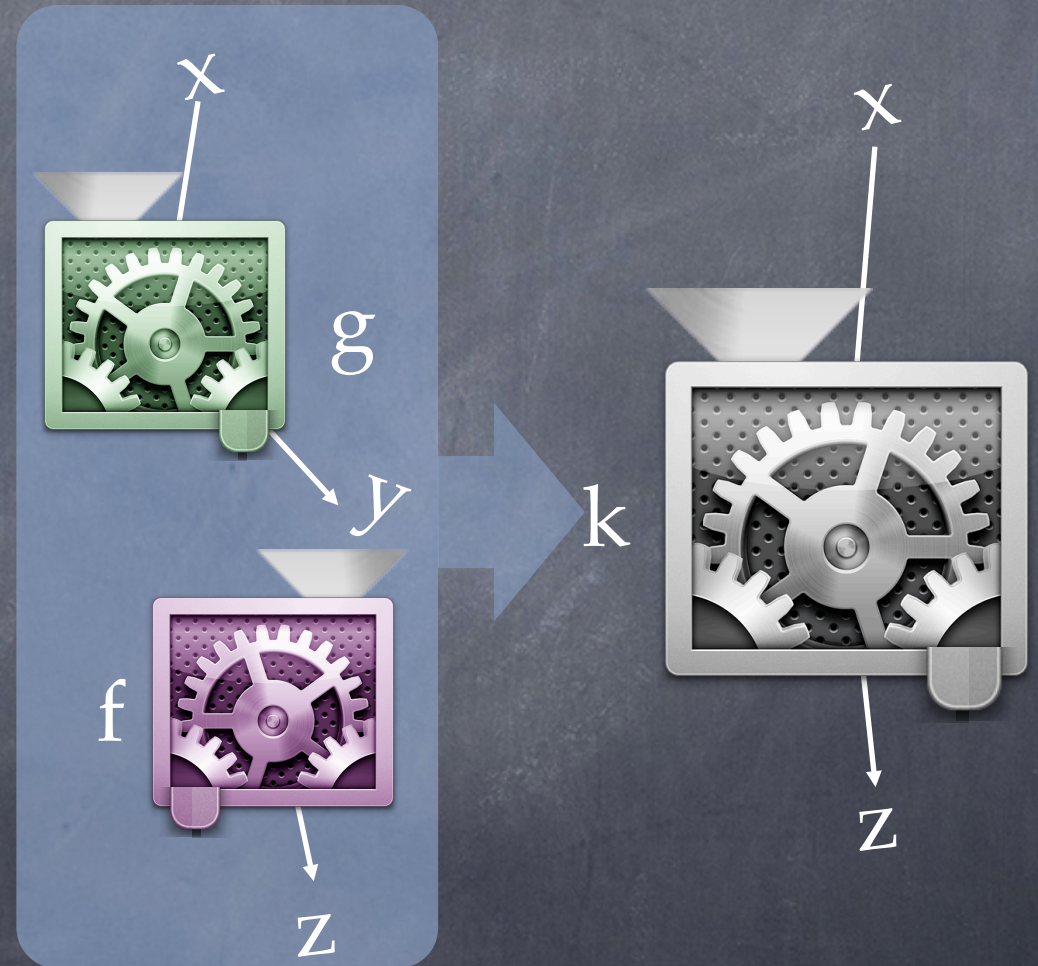
$$f(x) = x^2 - 1$$

$$g(x) = 4$$

$$\begin{aligned} k(x) &= f(g(x)) \\ &= g(x)^2 - 1 \\ &= 4^2 - 1 = 15 \end{aligned}$$

niet:

$$l(x) = g(f(x)) = 4 \neq k(x)$$



In een samengestelde functie wordt ene functie toegepast op de waarde van de andere

$$k(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

voorb.

$$f(x) = 2x^2 + 3$$

$$g(x) = 1 - 3x$$

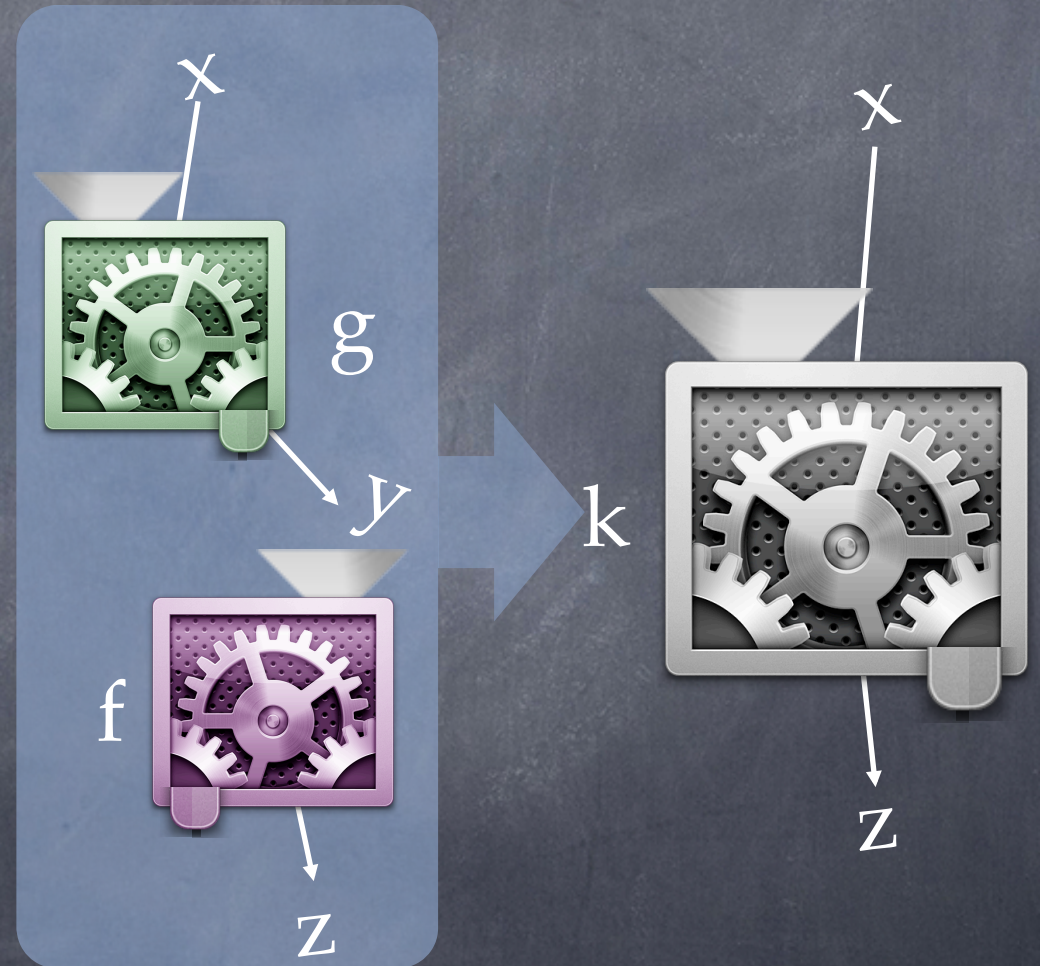
$$k(x) = f(g(x))$$

$$= 2 \cdot g(x)^2 + 3$$

$$= 2 \cdot (1 - 3x)^2 + 3$$

niet:

$$l(x) = g(f(x)) = 1 - 3 \cdot f(x) = 1 - 3 \cdot (2x^2 + 3) \neq k(x)$$



Voor differentiëren is het handig (noodzakelijk!) om samengestelde functies te herkennen

de “kettingregel” is belangrijkste regel bij differentiëren

$$\partial_x[f(g(x))] = \partial_x f(g(x)) \cdot \partial_x g(x)$$

daarom samenstelling herkennen!

voorb.

$$k(x) = f(g(x)) = (2x - 1)^3 \Rightarrow f(x) = x^3, g(x) = 2x - 1$$

$$\text{want } f(g(x)) = g(x)^3 = (2x - 1)^3 = k(x)$$

$$k(x) = (3x - 1)(3x + 1) \Rightarrow f(x) = (x-1)(x+1), g(x) = 3x$$

vaak ambigu, kan op meerdere manieren!

Programma vandaag

- Samenvatting
- **Samengestelde functies**
- Continuïteit
- Concept differentiëren
- Differentiatie regels (optellen, vermenigvuldiging)
- Differentiatie regels
(samengestelde functies en speciale functies $\exp$ en $\ln$)

Continuïteit

- Een functie heet continue in een specifiek punt x_0 , wanneer
- $f(x_0+h)$ naar $f(x_0)$ gaat als h naar nul gaat
- $\lim |f(x_0+h)-f(x_0)| = 0, h \rightarrow 0$
- **Waarom is $1/0$ niet oneindig?**

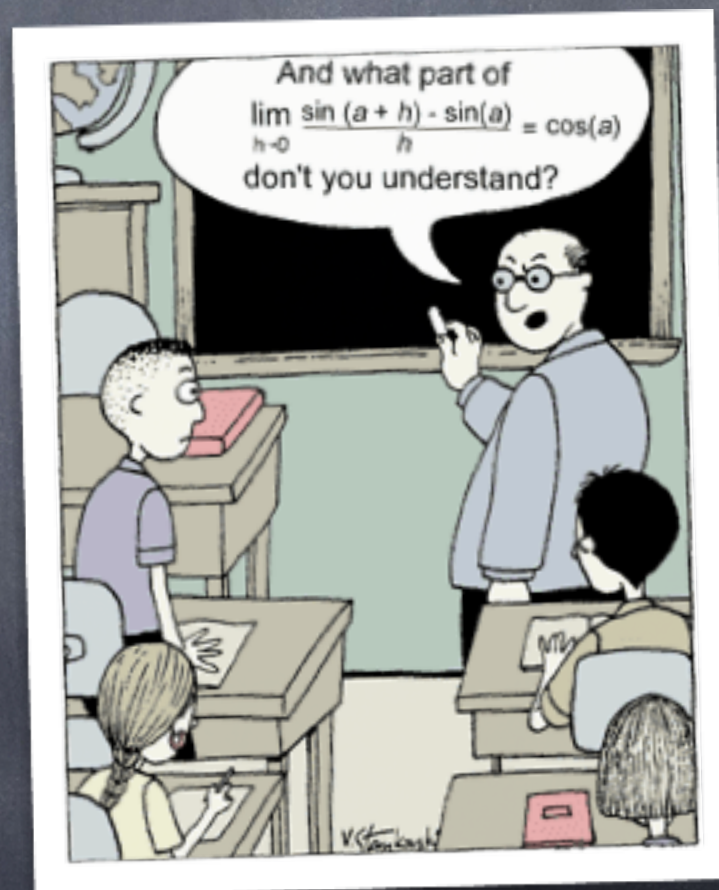
“In de buurt van x_0 ”-functie

- Gegeven f en x_0 , defineer:
 - $g(h)=x_0+h$
 - $k(h)=f(g(h))-f(x_0)$
- f is continu in x_0 als
 - $\lim |f(x_0+h)-f(x_0)|=0, h \rightarrow 0$
 - $\lim |k(h)|=0, h \rightarrow 0$

Programma vandaag

- Samenvatting
- Samengestelde functies
- Continuïteit
- **Concept differentiëren**
- Differentiatie regels (optellen, vermenigvuldiging)
- Differentiatie regels (samengestelde functies en speciale functies $\exp$ en $\ln$)

Afgeleide en differentiëren



Afgeleiden beschrijven de verandering van een functie onder veranderende input

de afgeleide geeft de rico van de raaklijn

maximum $\Rightarrow$ rico (afgeleide) = 0

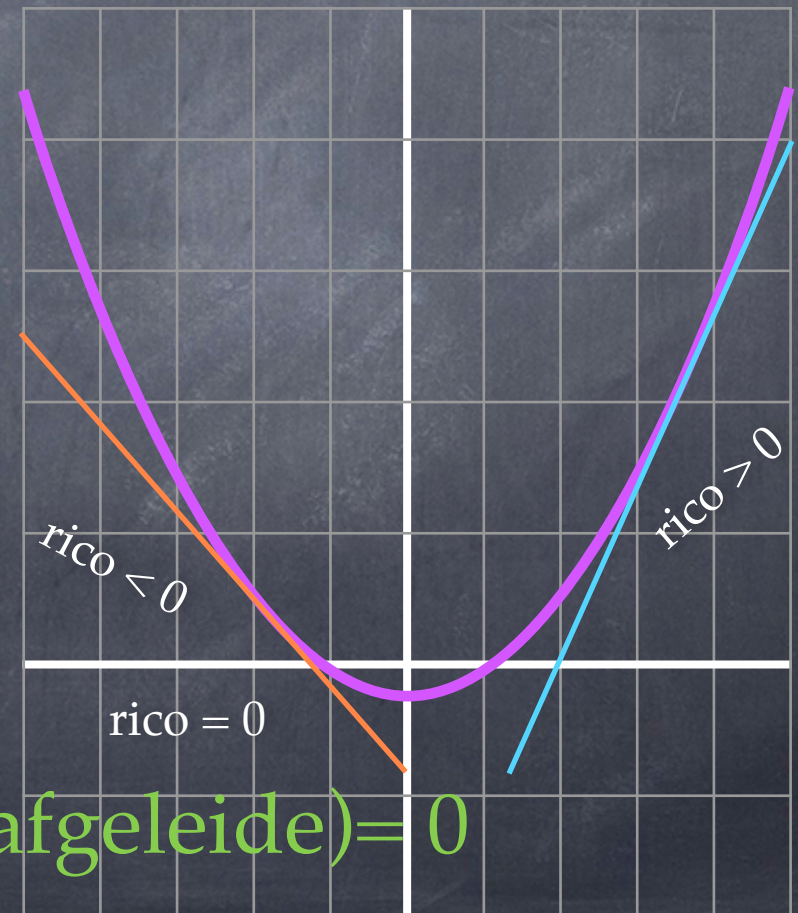
- als rico positief is
neemt $f(x)$ toe met x

- als rico negatief is
neemt $f(x)$ af met x

- wat nu als rico = 0?

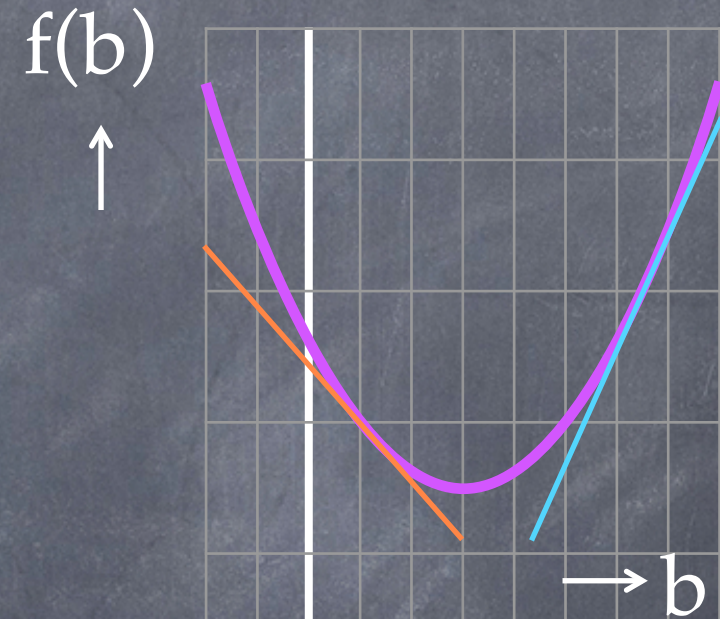
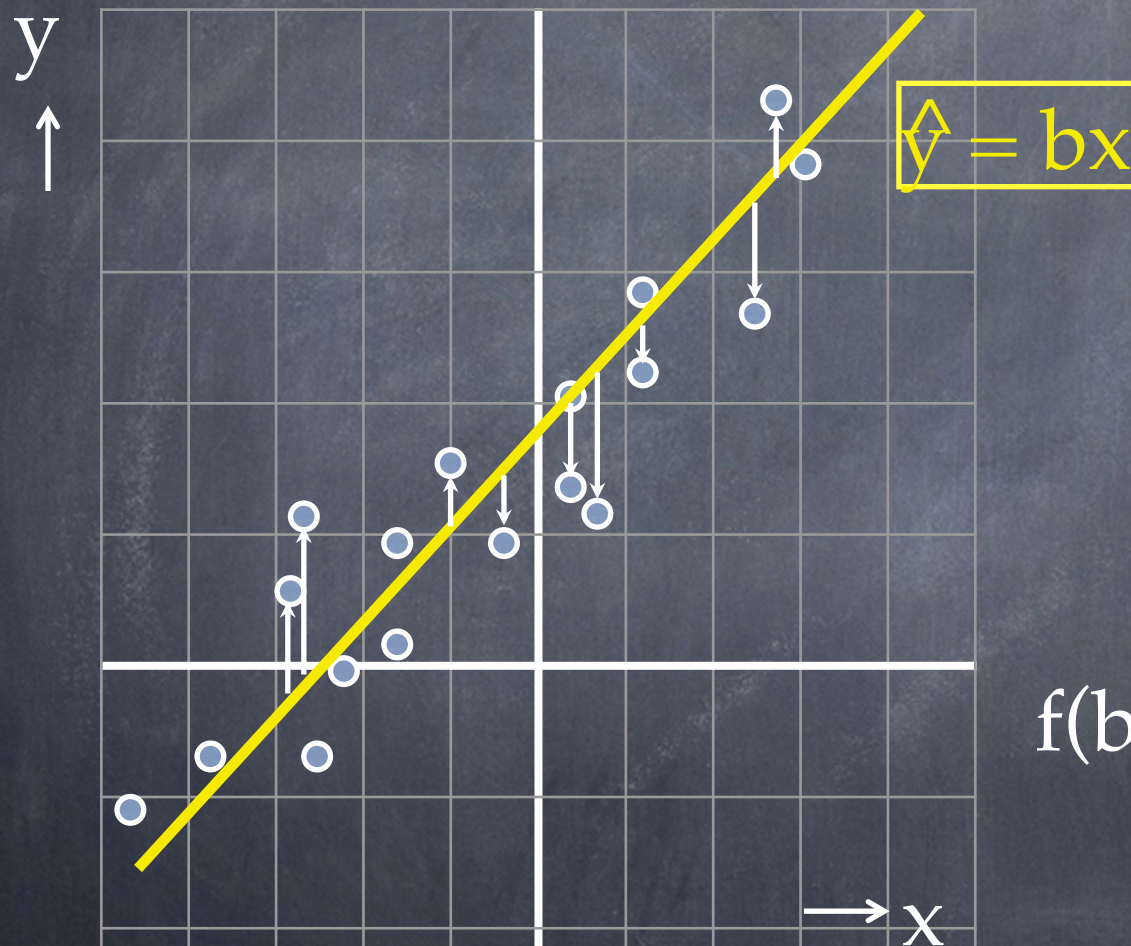
raaklijn horizontaal;
 $f(x)$ veranderd niet

minimum $\Rightarrow$ rico (afgeleide) = 0



Afgeleiden helpen bij het passen van modellen op data

kleinste kwadraten methode



$$\begin{aligned} f(b) &= \sum (y - bx)^2 \\ &= s_x^2 b^2 - 2s_{xy}b + s_y^2 \end{aligned}$$

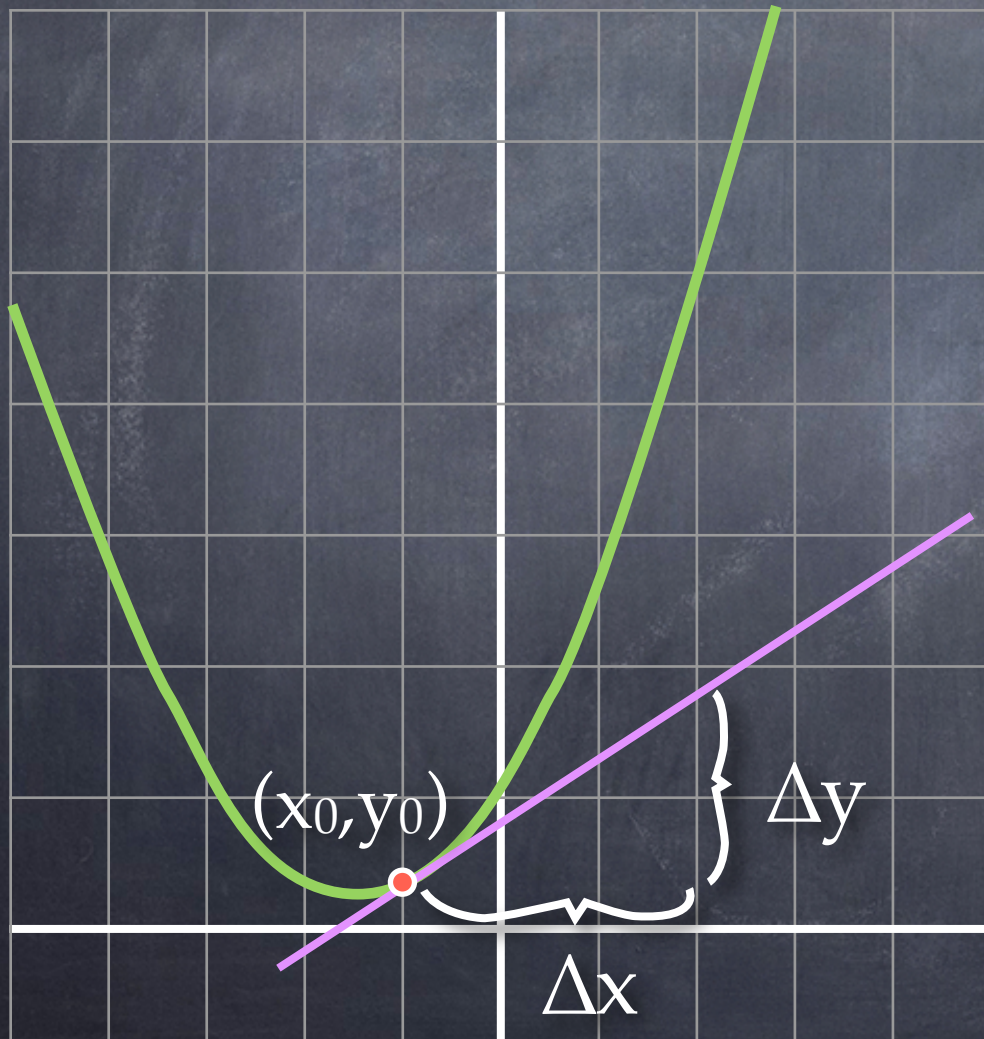
$$ax^2 + bx + c$$

wat dan? $\Rightarrow$ differentieren

alternatief: $g(b) = \sum \ln[p(x; b)]$

maximum likelihood

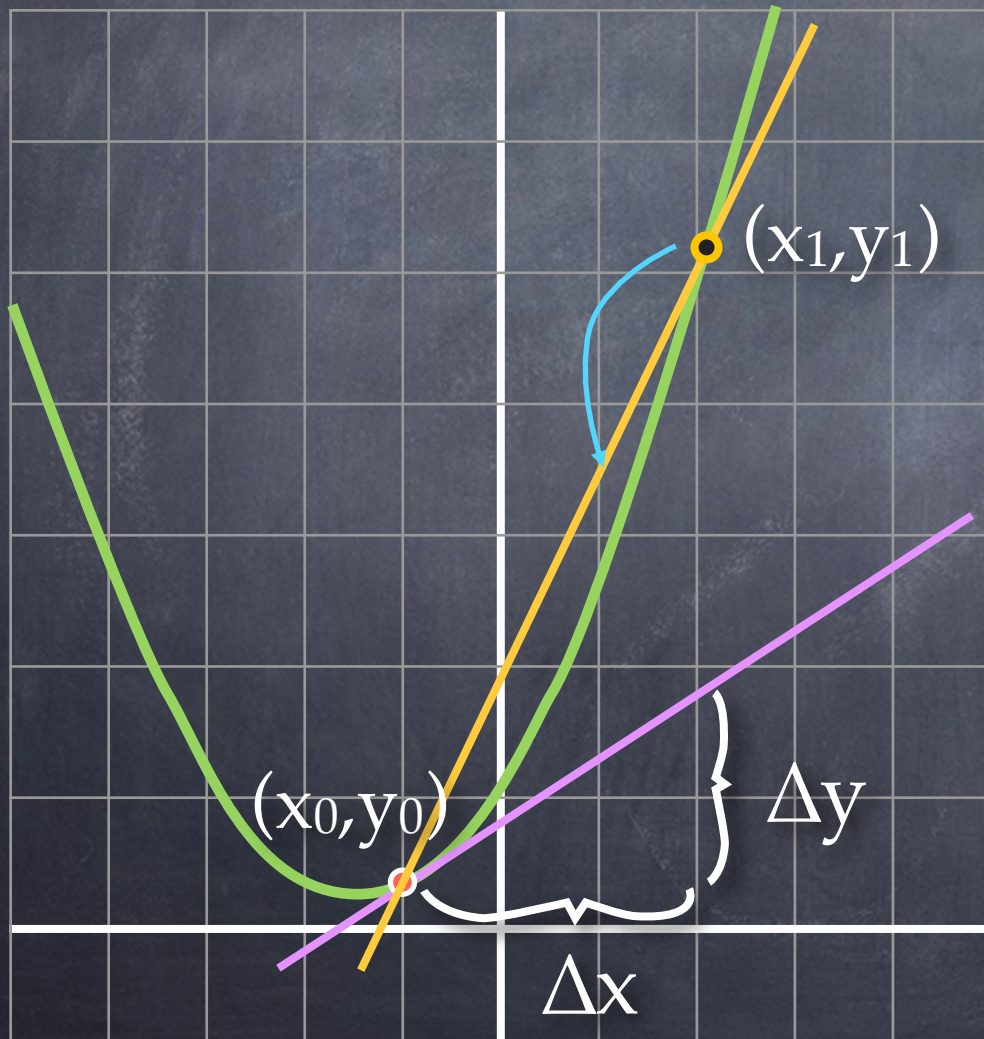
De afgeleide van een functie in een bepaald punt is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn



Een raaklijn is een rechte die een curve raakt in één punt en dezelfde richting heeft

$$\text{rico} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{'afgeleide' in } \bullet$$

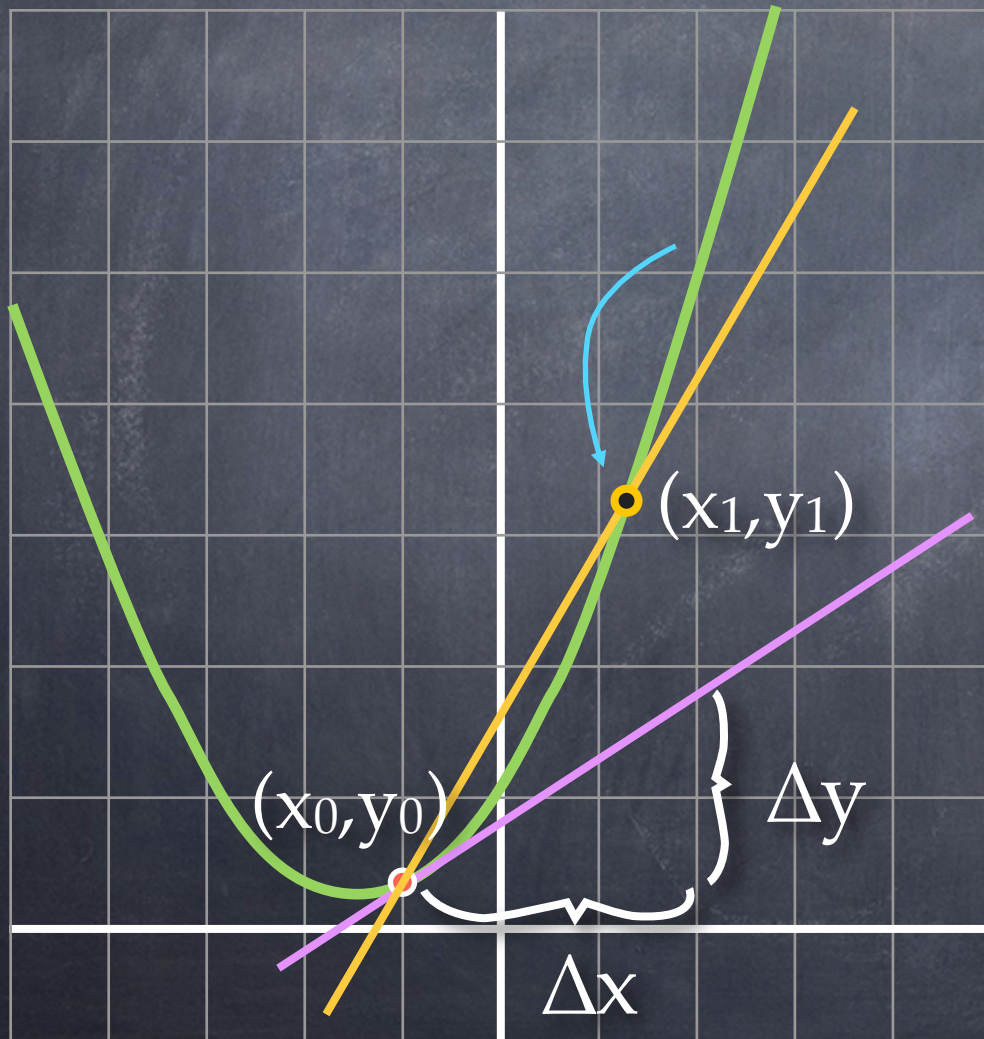
De afgeleide in een punt kan worden bepaald als limiet geval van de rico van een secantlijn



Een secantlijn doorsnijdt een curve in twee punten

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \text{'afgeleide' in } \bullet \\ &\approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\end{aligned}$$

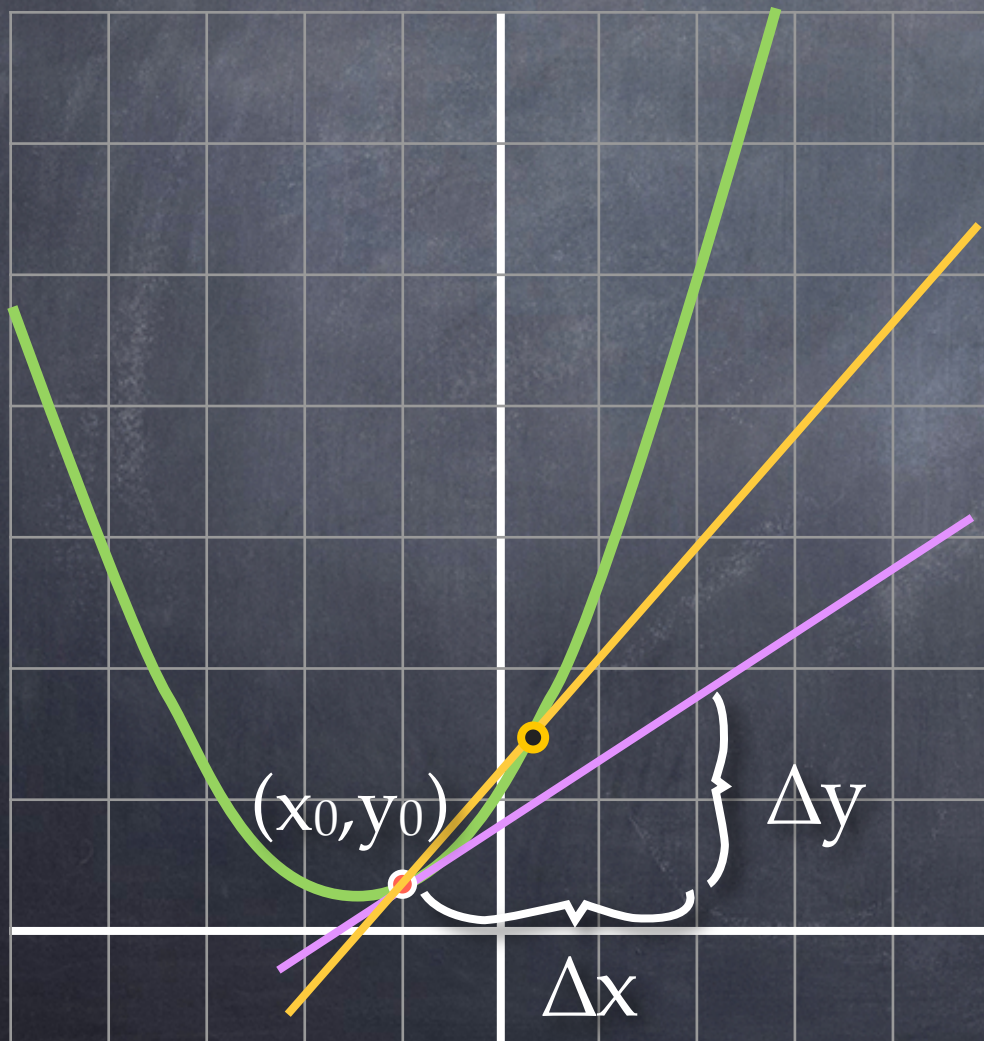
De afgeleide in een punt kan worden bepaald als limiet geval van de rico van een secantlijn



Benadering wordt beter
als (x_1, y_1) dichterbij ligt

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \text{'afgeleide' in } \bullet \\ &\approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\end{aligned}$$

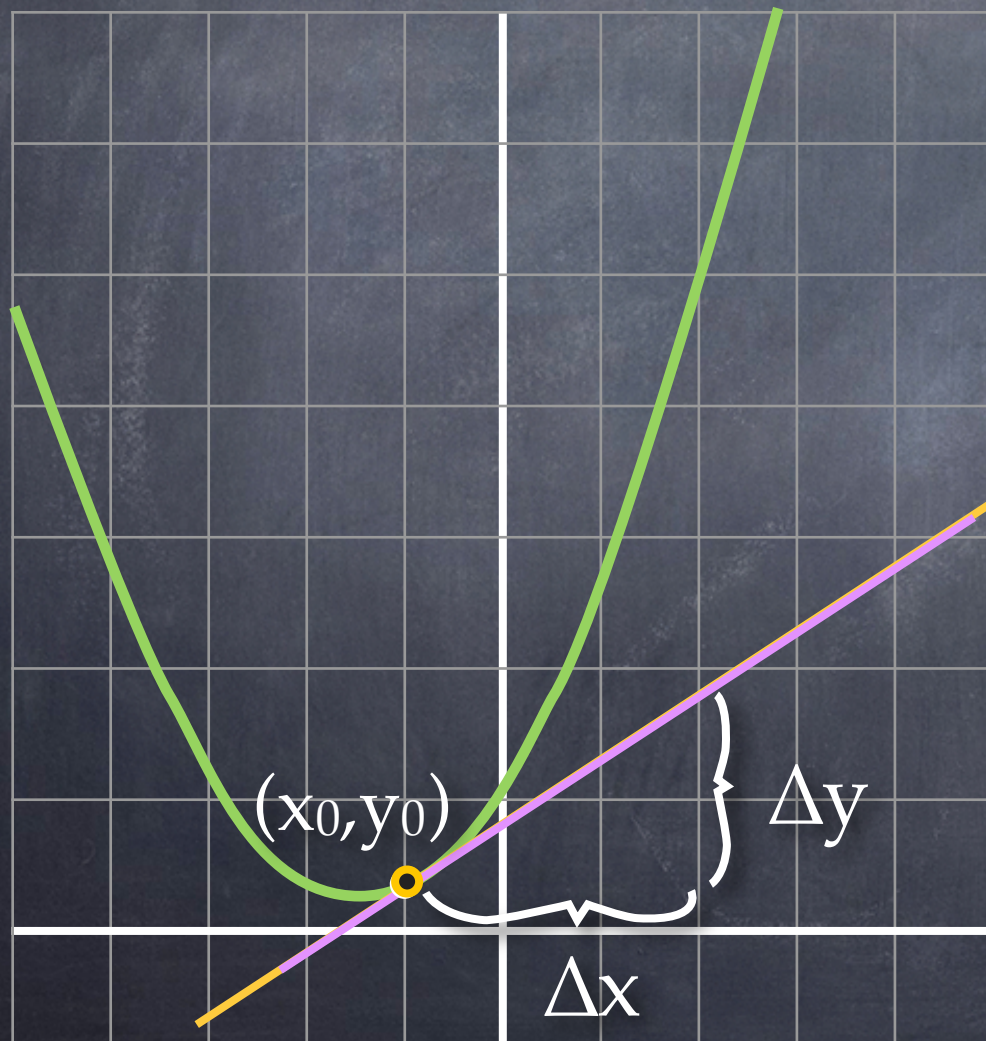
De afgeleide in een punt kan worden bepaald als limiet geval van de rico van een secantlijn



De afgeleide is de limiet van deze benadering als (x_1, y_1) zeer dicht bij $\bullet$ komt

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \text{'afgeleide' in } \bullet \\ &\approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

De afgeleide in een punt kan worden bepaald als limiet geval van de rico van een secantlijn



De afgeleide is de limiet van deze benadering als (x_1, y_1) zeer dicht bij $\bullet$ komt

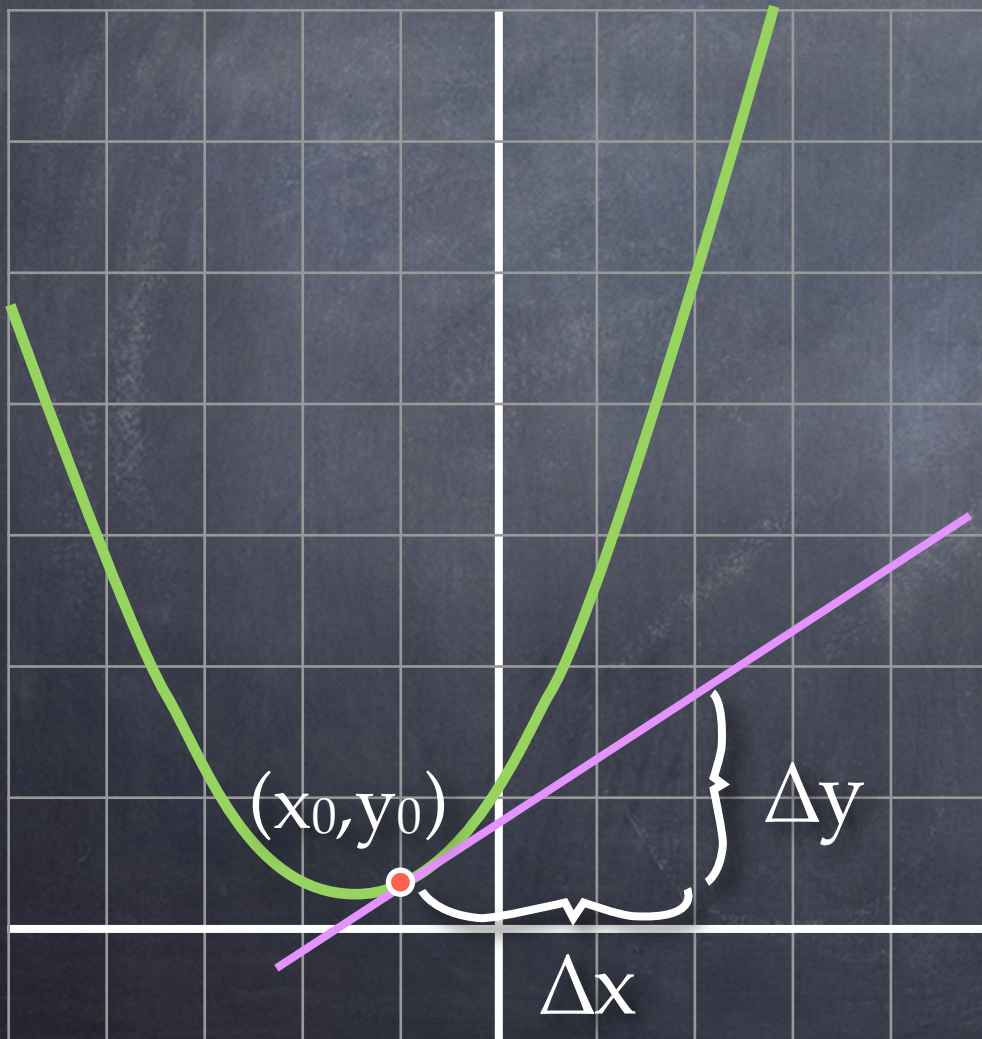
$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \text{'afgeleide' in } \bullet \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

De afgeleide in een punt kan worden bepaald als
limiet geval van de rico van een secantlijn

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{'afgeleide' in } \bullet$$

$$= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$= f'(x_0)$$



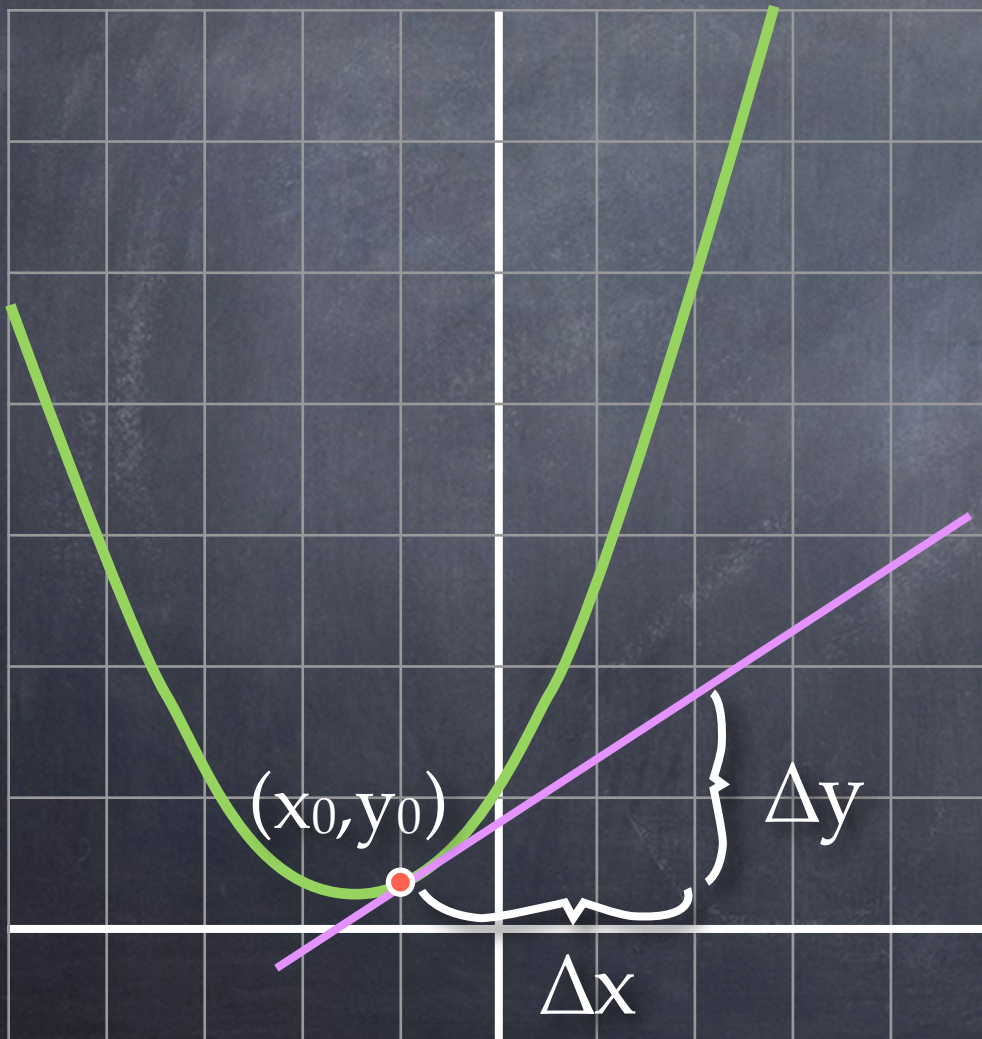
De afgeleide in een punt kan worden bepaald als limiet geval van de rico van een secantlijn

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{'afgeleide' in } \bullet$$

$$= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

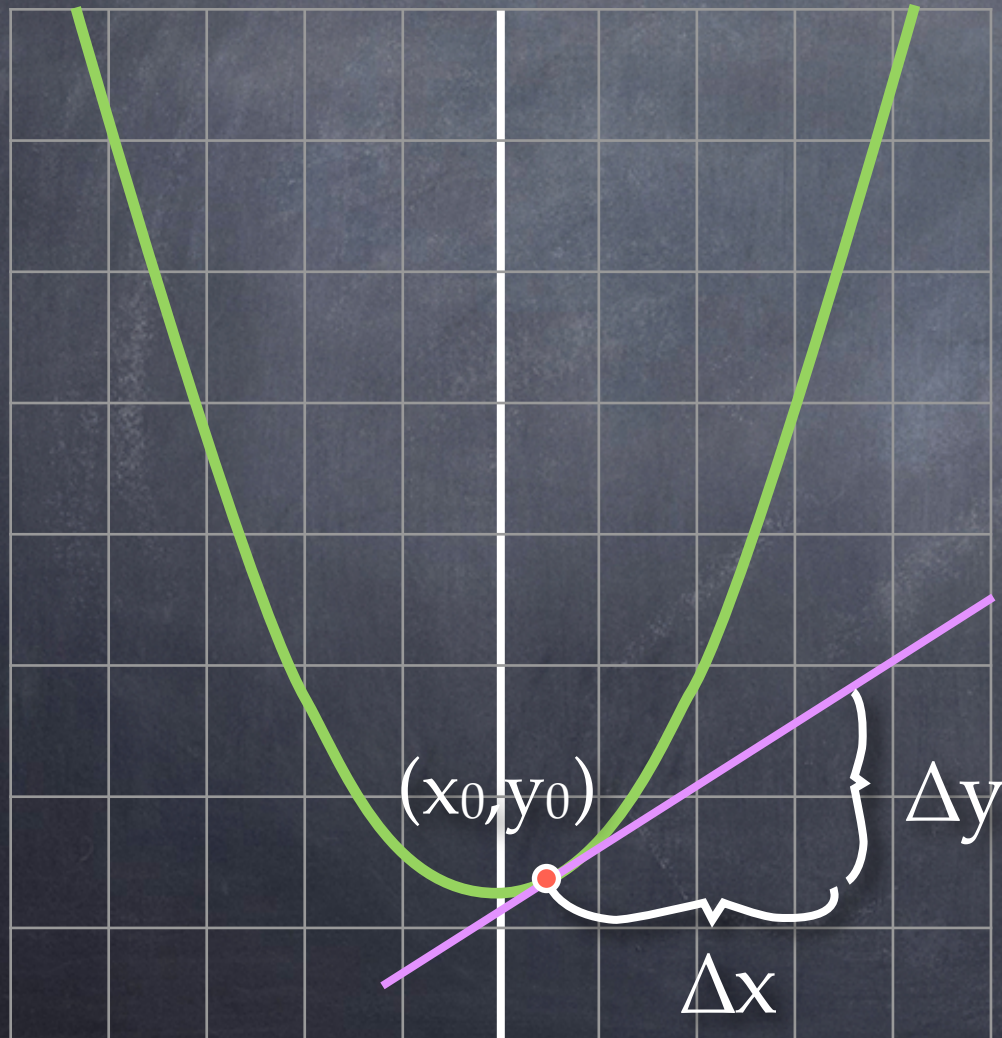
handiger met $x_1 = x_0 + h$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



De afgeleide in een punt kan worden bepaald als limiet geval van de rico van een secantlijn

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{'afgeleide' in } \bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



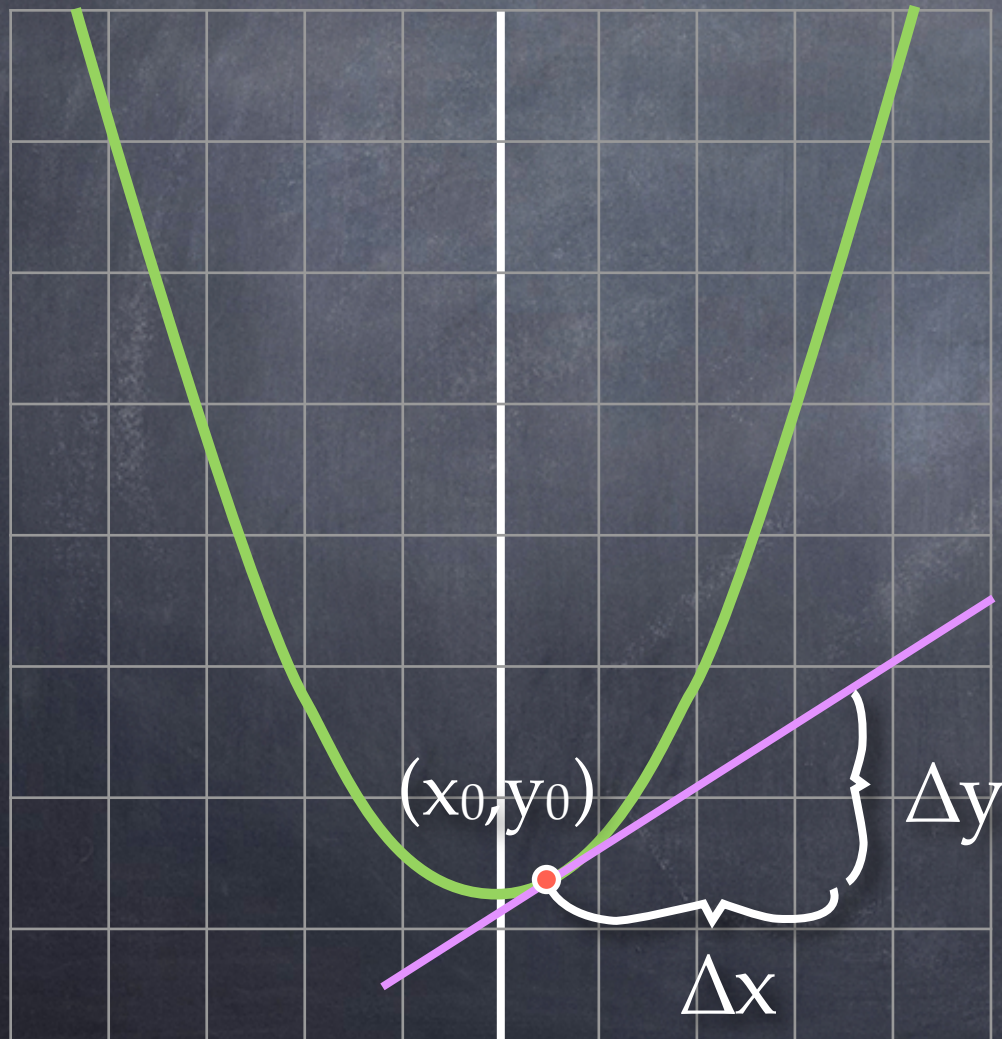
voorb. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + h)^2 - \frac{1}{8}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{8}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}h \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De afgeleide in een punt kan worden bepaald als limiet geval van de rico van een secantlijn

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{'afgeleide' in } \bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



is afgeleide in één punt;
hoe zit 't met andere
punten?

bijvoorbeeld de afgeleide
in het punt $x_0 = x$, zonder x
nader te specificeren

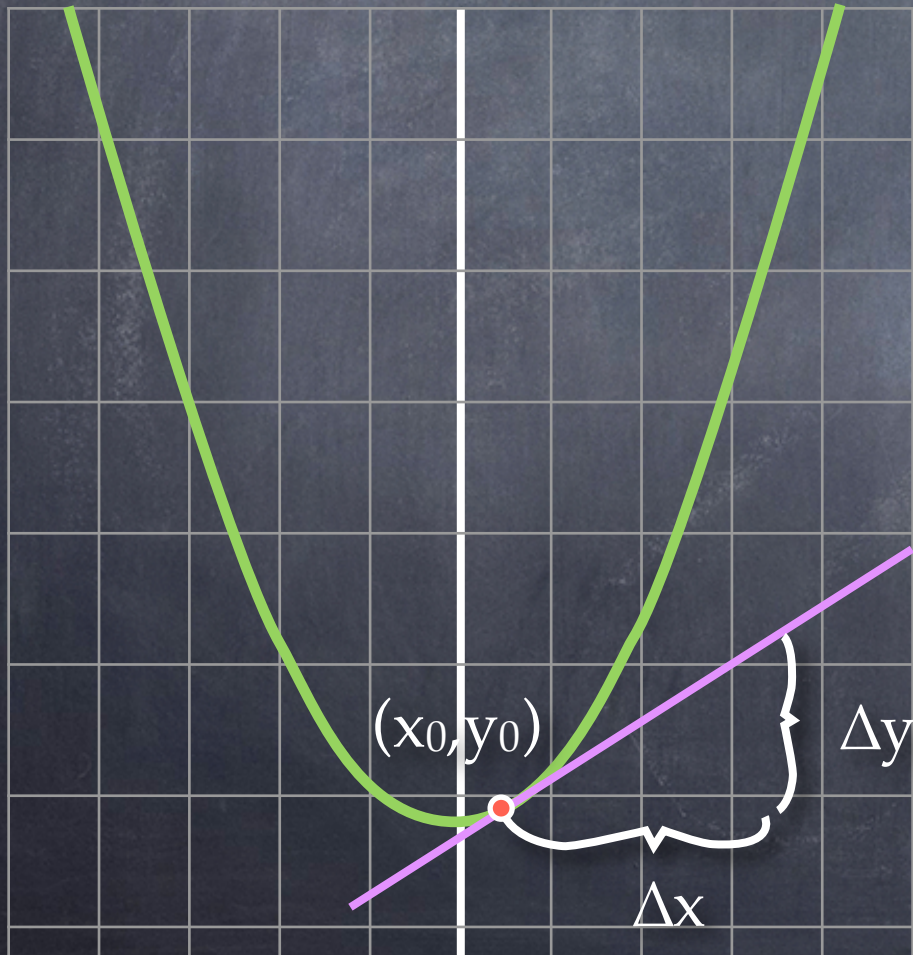
Berekening van een afgeleide in een onbepaald punt geeft een formule voor alle punten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{'afgeleide' in } \bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

voorb. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$x_0 = x \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x + h)^2 - \frac{1}{2}x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + hx + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} x + \frac{1}{2}h = x \end{aligned}$$



De formule voor de afgeleide in een onbepaald punt heet 'de afgeleide' van de functie

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{'afgeleide' in } \bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

voorb. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$x_0 = x \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}x^2$$

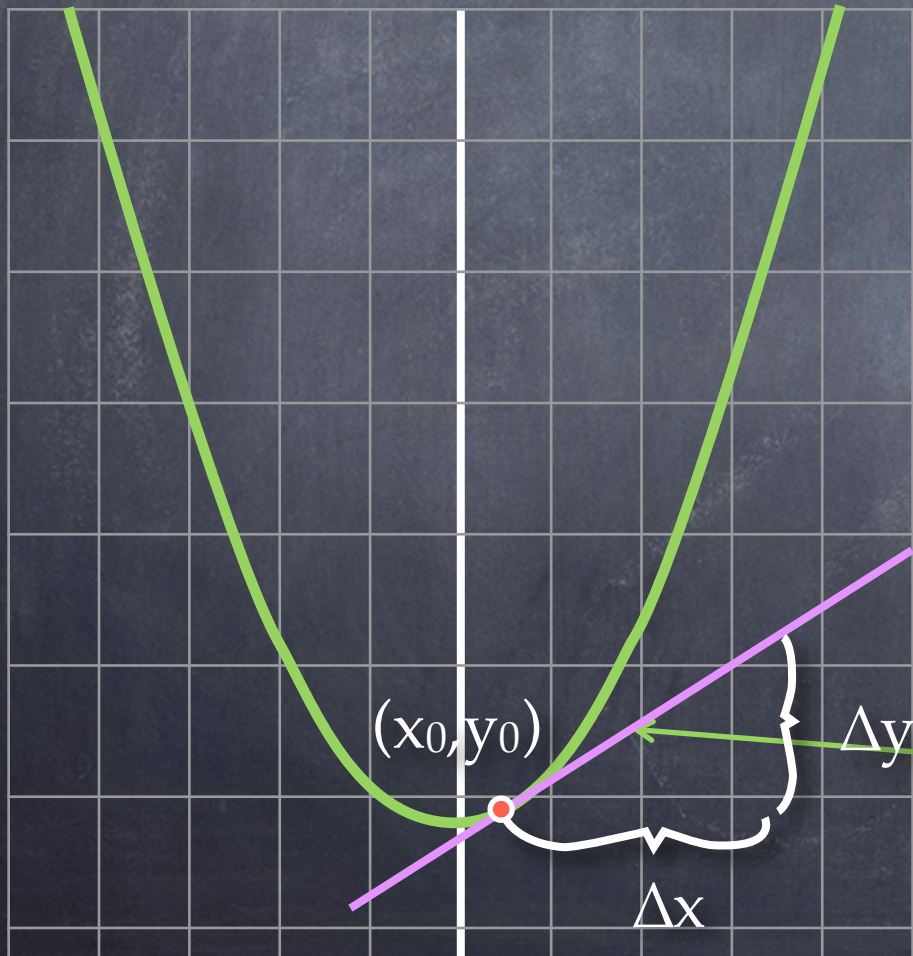
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$= x$$

$$= f'(x) \text{ "de afgeleide" van } f$$

$$= \frac{dy}{dx} = y' = D_x f(x)$$

geeft rico van raaklijn in punt x!



formule voor afgeleide
in willekeurig punt x

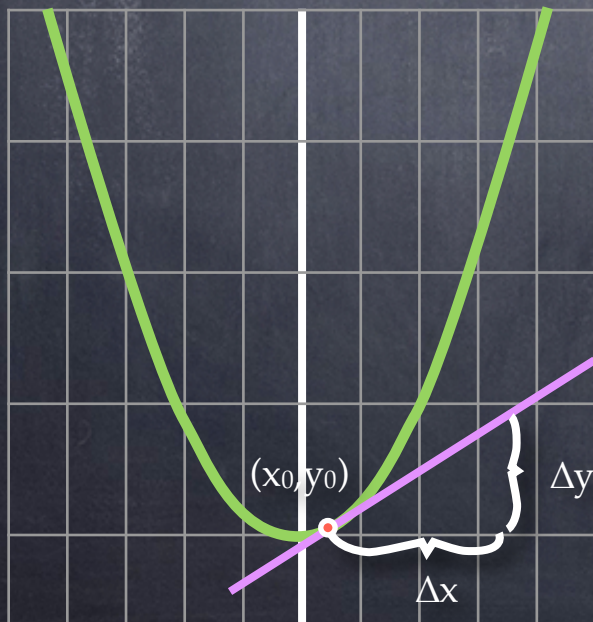
Het berekenen van de afgeleide van een functie met behulp van limieten is vaak veel werk

$$\frac{dy}{dx} = \text{afgeleide van } f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

voorb. $f(x) = 2x^2 + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2(x+h)^2 + 1] - [2x^2 + 1]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 1 - 2x^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 4x + 2h = 4x \end{aligned}$$



Het berekenen van de afgeleide van een functie met behulp van limieten is vaak veel werk

$$\frac{dy}{dx} = \text{afgeleide van } f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

voorb. $f(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

“worteltruc”

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}]}$$

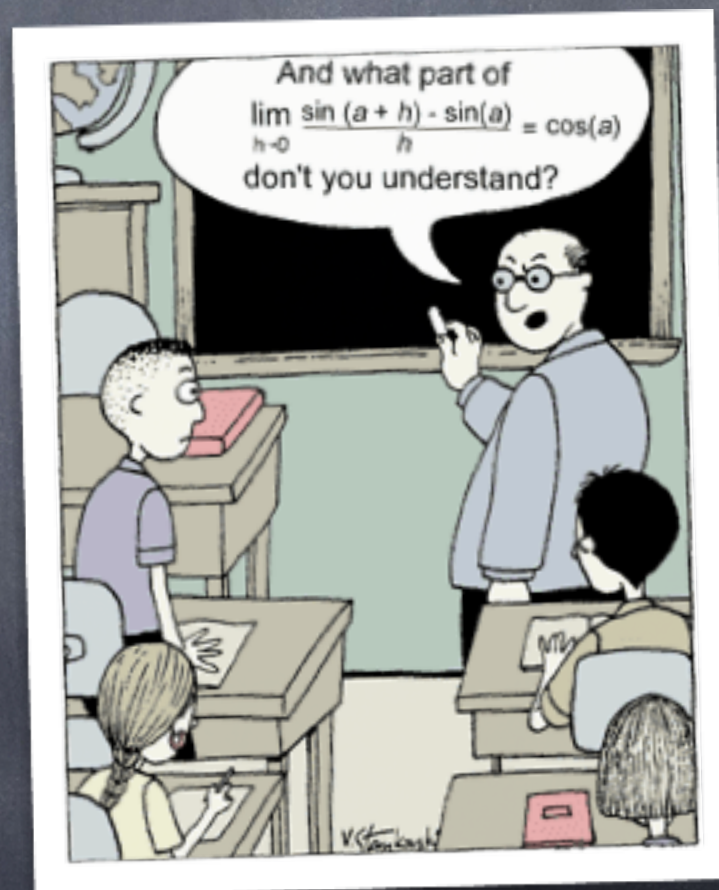
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



Programma vandaag

- Samenvatting
- Samengestelde functies
- Continuïteit
- Concept differentiëren
- Differentiatie regels (optellen, vermenigvuldiging)
- Differentiatie regels
(samengestelde functies en speciale functies $\exp$ en $\ln$)

Rekenregels differentiëren



Het afleiden van een aantal rekenregels
differentiëren zorgt voor véél minder werk

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Differentiëren is het bepalen van afgeleiden

regel 1: $\frac{d}{dx}[c] = 0$

regel 2: $\frac{d}{dx}[x^n] = n \cdot x^{n-1}$

regel 3: $\frac{d}{dx}[c \cdot f(x)] = c \cdot \frac{d}{dx}[f(x)]$

regel 4: $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$

Bij een constante functie is de raaklijn altijd horizontaal en de rico dus nul

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f(x)$

$$f(x) = C \quad \text{“constante functie”}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$



Differentiëren van een machtsfunctie verlaagd de macht van die functie met één graad

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f(x)$

$$f(x) = x^n \quad \text{machts functie}$$

$$\Rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \quad \text{bewijs komt later...}$$

$$\text{voorbeeld: } n = 2 \Rightarrow f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x^{2-1}$$



Een multiplicatieve constante mag voor het differentiatieteken gehaald worden

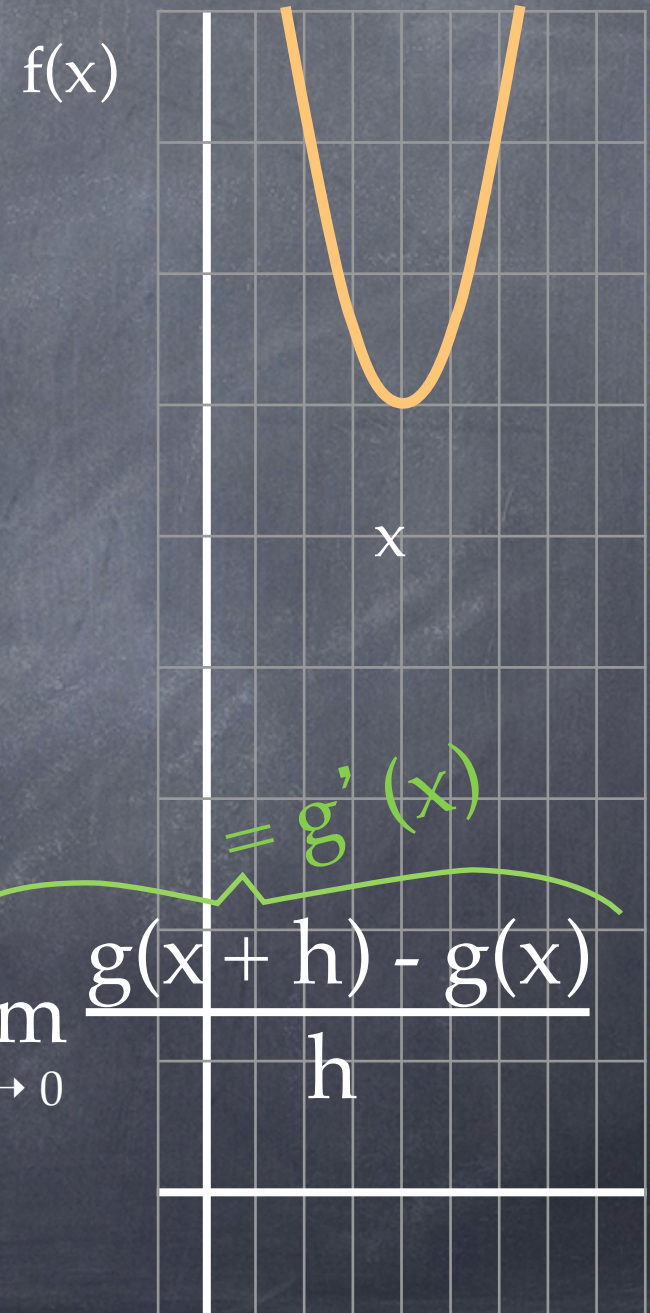
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x) = c \cdot g(x) \quad c \text{ hangt niet af van } x$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot g(x+h) - c \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h} = c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$



Een multiplicatieve constante mag voor het differentiatieteken gehaald worden

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

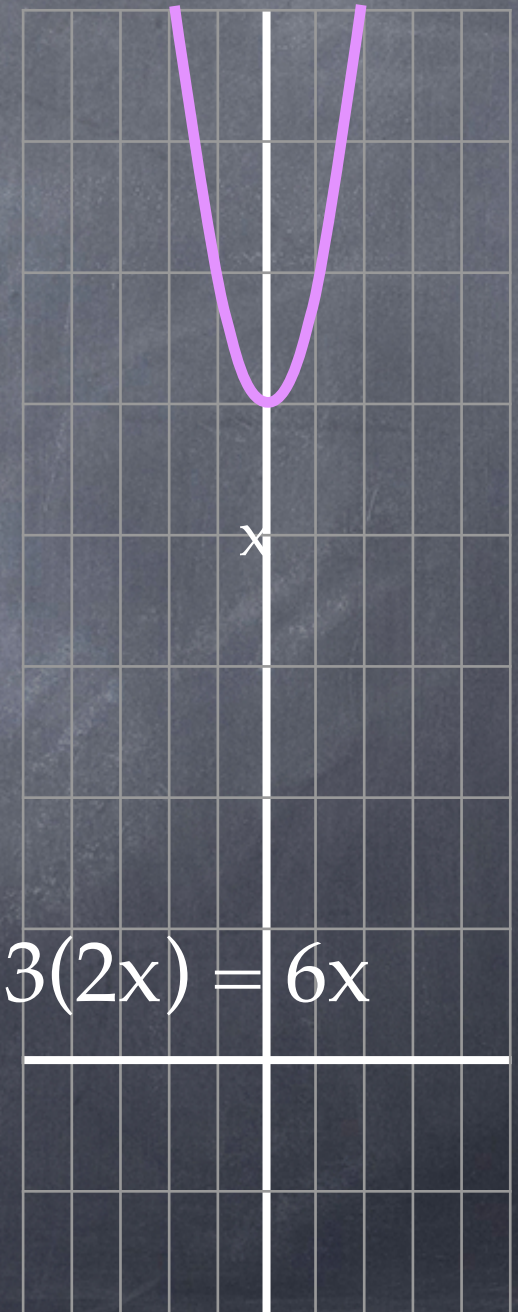
$f(x)$

$$f(x) = c \cdot g(x) \quad c \text{ hangt niet af van } x$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$\text{voorbeeld: } f(x) = 3x^2$$

$$f'(x) = D_x[f(x)] = D_x[3 \cdot x^2] = 3 \cdot D_x[x^2] = 3(2x) = 6x$$



De afgeleide van een som van twee functies is de som van de afgeleiden van die functies

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$u(x) = f(x) + g(x)$$

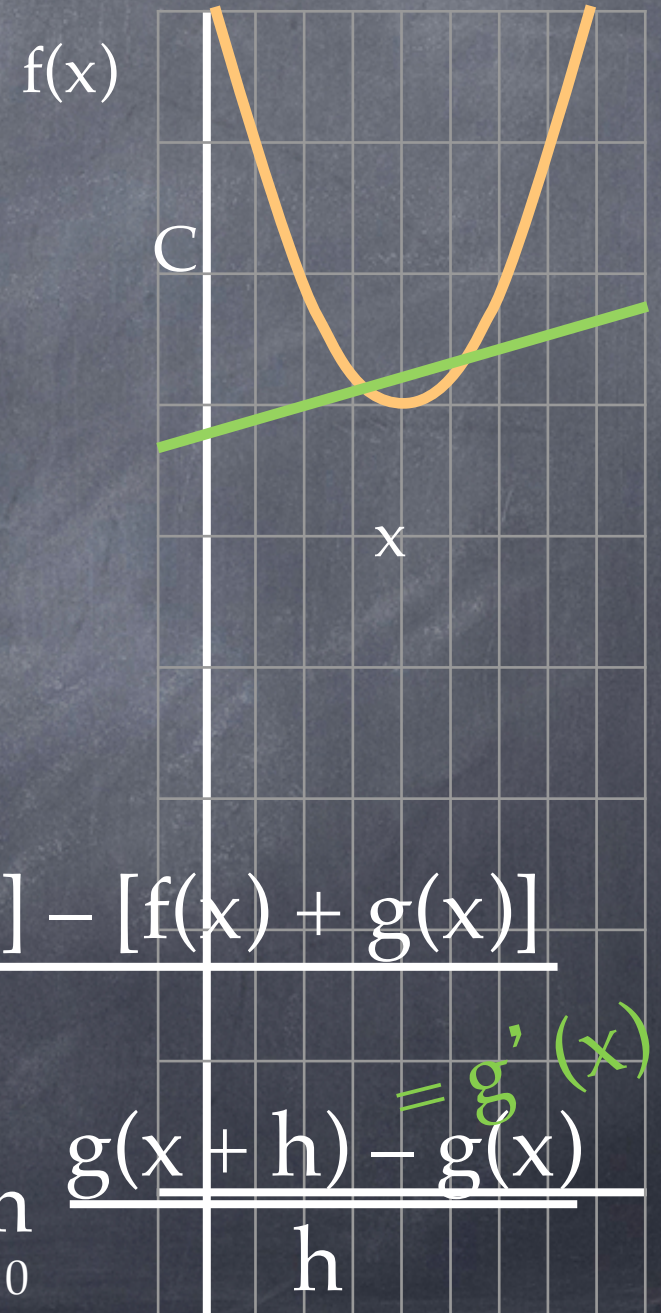
$$\Rightarrow u'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$= f'(x) + g'(x)$



De afgeleide van een som van twee functies is de som van de afgeleiden van die functies

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f(x)$

$$u(x) = f(x) + g(x)$$

$$\Rightarrow u'(x) = f'(x) + g'(x)$$

voorb: $u(x) = 3x^2 + 6$

$$u'(x) = D_x[u(x)] = D_x[3x^2 + 6] = D_x[3x^2] + D_x[6]$$

$$= 6x + D_x[6] = 6x + 0$$

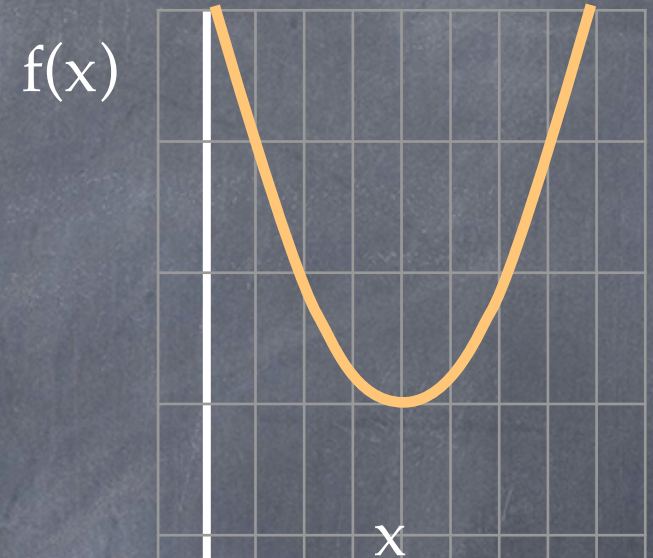
$$= 6x$$

$$\therefore u'(x) = 6x$$



De afgeleide van een som van twee functies is de som van de afgeleiden van die functies

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



$$u(x) = f(x) + g(x)$$

$$\Rightarrow u'(x) = f'(x) + g'(x)$$

voorbeeld: $u(x) = 3x^2 + 2x$

$$u'(x) = D_x[u(x)] = D_x[3x^2 + 2x] = D_x[3x^2] + D_x[2x]$$

$$= 3 \cdot (2x) + D_x[2x] = 6x + D_x[2x]$$

$$= 6x + 2 \cdot D_x[x] = 6x + 2 \cdot D_x[x^1]$$

$$= 6x + 2 \cdot (1 \cdot x^{1-1}) = 6x + 2 \cdot (1) = 6x + 2$$

Met deze eerste vier regels kunnen we gemakkelijk alle polynomen differentiëren

regel 1: $D_x[c] = 0$

regel 2: $D_x[x^n] = n \cdot x^{n-1}$

regel 3: $D_x[c \cdot f(x)] = c \cdot D_x[f(x)]$

regel 4: $D_x[f(x) \pm g(x)] = D_x[f(x)] \pm D_x[g(x)]$

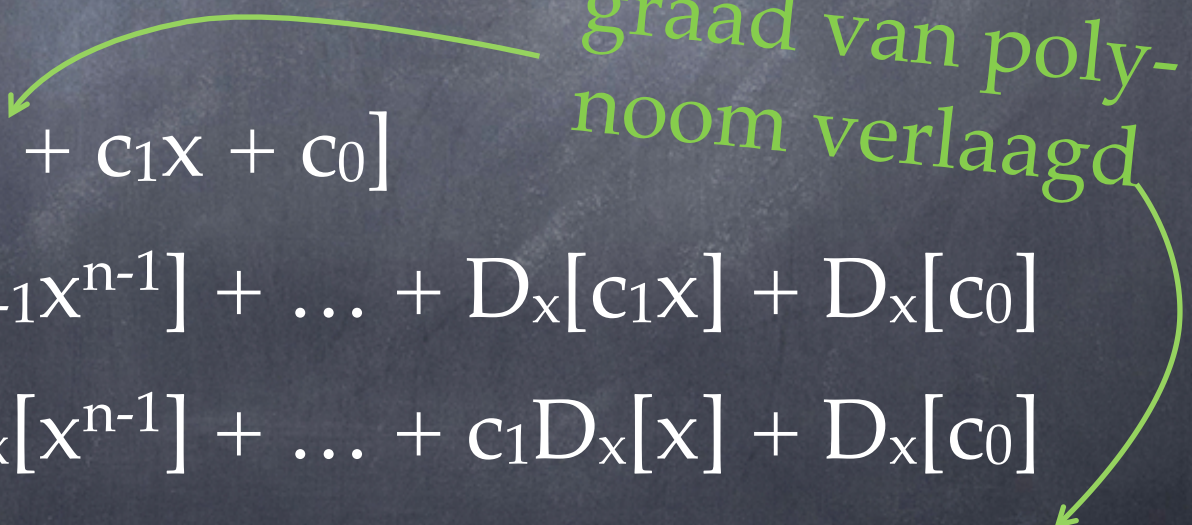
$$D_x[c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0]$$

$$= D_x[c_n x^n] + D_x[c_{n-1} x^{n-1}] + \dots + D_x[c_1 x] + D_x[c_0]$$

$$= c_n D_x[x^n] + c_{n-1} D_x[x^{n-1}] + \dots + c_1 D_x[x] + D_x[c_0]$$

$$= c_n n x^{n-1} + c_{n-1} (n-1) x^{n-2} + \dots + c_1 + 0$$

graad van polynoom verlaagd



Met de volgende vier regels er bij kunnen bijna alle functies worden gedifferentieerd

regel 5:
productregel

$$D_x[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

regel 6:
quotientregel

$$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

regel 7:
kettingregel

$$D_x[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

regel 8:
machtsregel

$$D_x[x^r] = r \cdot x^{r-1}$$

(algemener dan
 $D_x[x^n] = nx^{n+1}$)

De afgeleide van het product van twee functies is niet het product van de afgeleiden

$$u(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\begin{aligned} u'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \\ &= f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

$\therefore u'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$

...en dus $u'(x) \neq f'(x)g'(x)$

De afgeleide van het product van twee functies is niet het product van de afgeleiden

$$u(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\therefore u'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$$

...en dus níet $u'(x) = f'(x)g'(x)$

voorbeeld: $u(x) = \underbrace{(x^2 + 3x)}_{f(x)} \underbrace{(4x + 5)}_{g(x)}$

$$f(x) = x^2 + 3x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x^2 + 3x]' = [x^2]' + [3x^1]' \\ &= 2 \cdot x^{2-1} + 3 \cdot 1 \cdot x^{1-1} = 2x + 3 \end{aligned}$$

$$g(x) = 4x + 5$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= [4x + 5]' = [4x^1]' + [5]' \\ &= 4 \cdot 1 \cdot x^{1-1} + 0 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore u'(x) &= f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) \\ &= (x^2 + 3x) \cdot 4 + (2x + 3) \cdot (4x + 5) \end{aligned}$$

De afgeleide van het product van twee functies is niet het product van de afgeleiden

$$u(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\therefore u'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$$

...en dus níet $u'(x) = f'(x)g'(x)$

voorbeeld: $u(x) = \underbrace{(x^2 + 3x)}_{f(x)} \underbrace{(4x + 5)}_{g(x)}$

$$\begin{aligned}\therefore u'(x) &= f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) \\ &= (x^2 + 3x) \cdot 4 + (2x + 3) \cdot (4x + 5) \\ &= 12x^2 + 34x + 15\end{aligned}$$

kan ook anders: $u(x) = 4x^3 + 17x^2 + 15x$

$$\begin{aligned}u'(x) &= [4x^3 + 17x^2 + 15x]' = [4x^3]' + [17x^2]' + [15x]' \\ &= 4 \cdot 3x^2 + 17 \cdot 2 \cdot x + 15 = 12x^2 + 34x + 15\end{aligned}$$

Het voordeel van de productregel is vooral bij functies die niet eenvoudige polynomen zijn

$$u(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\therefore u'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$$

...en dus níet $u'(x) = f'(x)g'(x)$

voorbeeld: $u(x) = \underbrace{2x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(x^2 + 4)}_{g(x)}$

$$f(x) = 2x \quad f'(x) = [2x]' = 2 \cdot [x^1] = 2 \cdot x^{1-1} = 2$$

$$g(x) = x^2 + 4 \quad g'(x) = [x^2 + 4]' = [x^2]' + [4]' = 2x + 0$$

$$\begin{aligned} \therefore u'(x) &= f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) \quad \text{óf} \quad u'(x) = [2x^3 + 8x]' \\ &= 2x \cdot (2x) + 2 \cdot (x^2 + 4) &= [2x^3]' + [8x]' \\ &= 6x^2 + 8 &= 6x^2 + 8 \end{aligned}$$

minder werk

De afgeleide van een breuk van twee functies is niet gelijk aan de breuk van de afgeleiden

$$u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$u'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

geen bewijs

voorbeeld: $u(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$

$$f(x) = x + 2 \quad f'(x) = [x + 2]' = [x^1]' + [2]' = 1$$

$$g(x) = x^2 - 1 \quad g'(x) = [x^2 - 1]' = [x^2]' - [1]' = 2x - 0$$

$$\begin{aligned} \therefore u'(x) &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} = \frac{1 \cdot (x^2 - 1) - (x + 2) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 4x - 1}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

De afgeleide van een breuk van twee functies is niet gelijk aan de breuk van de afgeleiden

$$u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$u'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

geen bewijs

voorbeeld: $u(x) = \frac{1}{x^3}$

$$f(x) = 1$$

$$f'(x) = [1]' = 0$$

$$g(x) = x^3$$

$$g'(x) = [x^3]' = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$$

$$\begin{aligned} \therefore u'(x) &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} = \frac{0 \cdot x^3 - 1 \cdot 3x^2}{(x^3)^2} \\ &= \frac{-3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4} \end{aligned}$$

De afgeleide van een breuk van twee functies is niet gelijk aan de breuk van de afgeleiden

$$u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$u'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

geen bewijs

voorbeeld: $u(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 + x + 1}$

$$f(x) = x^2 - 4x + 2$$

$$f'(x) = [x^2 - 4x + 2]' = 2x - 4$$

$$g(x) = x^2 + x + 1$$

$$g'(x) = [x^2 + x + 1]' = 2x + 1$$

$$\therefore u'(x) = \frac{(2x-4)(x^2+x+1) - (x^2-4x+2)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{5x^2 - 2x - 6}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Samenvattend zijn er 8 rekenregels voor differentiëren die onthouden moeten worden

$$[c]' = 0$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[x^r]' = r \cdot x^{r-1}$$