Wiskunde Module

Basisprogramma Psychologische Methodenleer

Alexander Ly (Raoul Grasman)

We behandelen voornamelijk algebra en differentiëren van functies

vr	algebra, incl. logaritmen
ma	functies, 1e & 2e orde polynomen
wo	afgeleiden, differentiëren
vr	differentiëren en integreren
ma	matrix algebra (?)

Er zijn 9 belangrijks algebra regels die je nodig hebt om vergelijkingen op te lossen

$a+b = b+a$

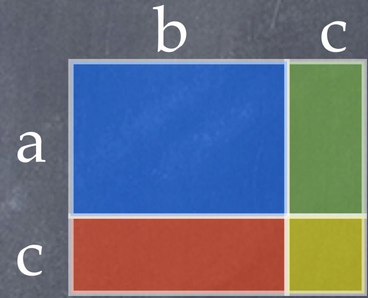
$a \cdot b = b \cdot a$

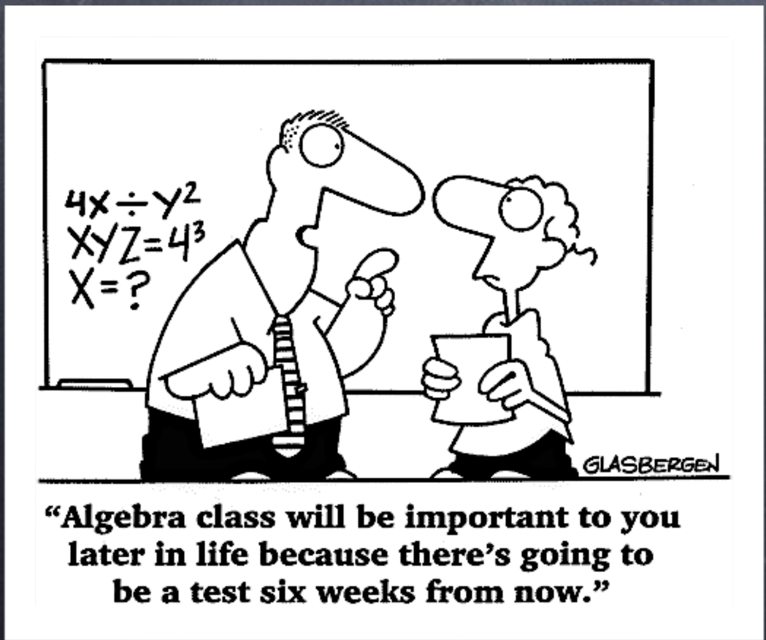
$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$(ab)^x = a^x \cdot b^x$





"Algebra class will be important to you later in life because there's going to be a test six weeks from now."

$b^{\log_b(y)} = y$

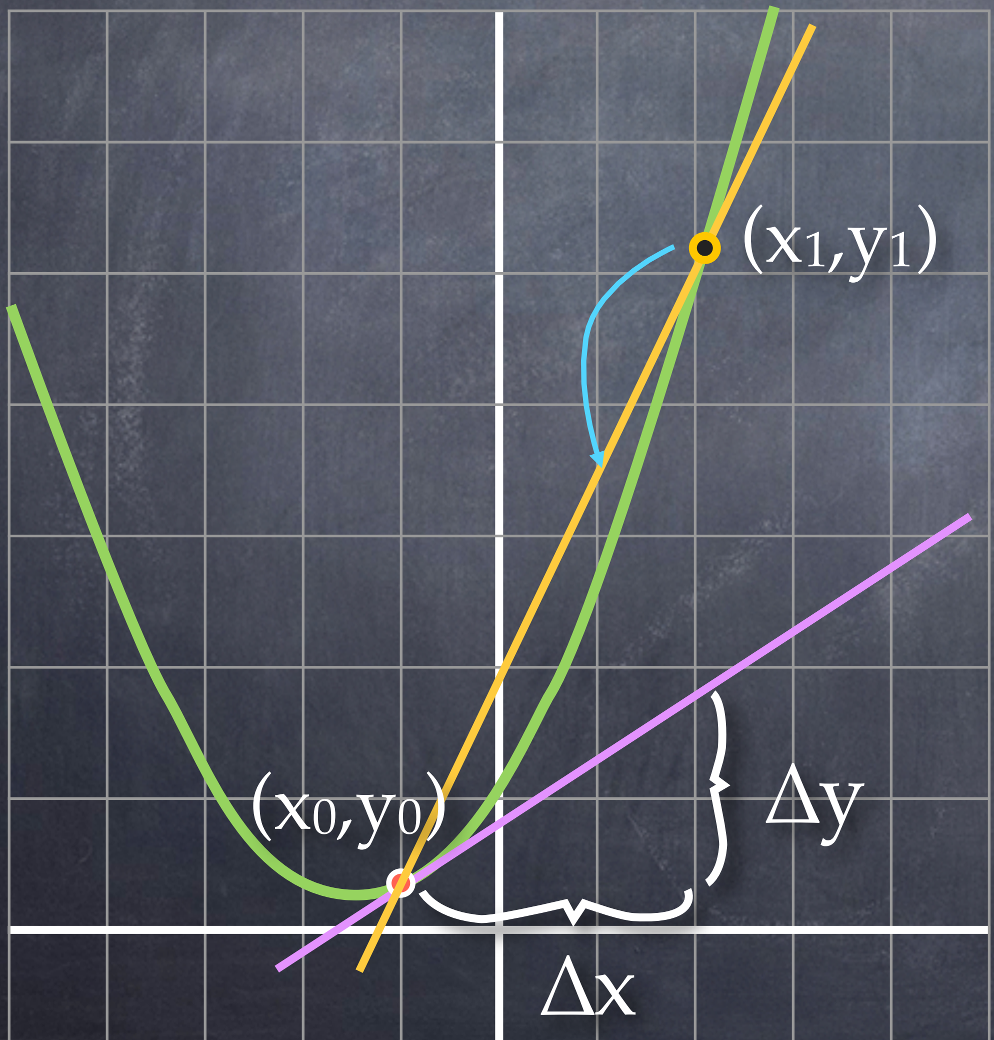
$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

$\log(x^y) = y \cdot \log(x)$

Programma vandaag

- Samenvatting: differentieren
- Het getal e
- Kettingregel
- Afgeleide van ln(x)
- Optimaliseren
- Approximeren
- Integreren

De afgeleide in een punt kan worden bepaald als limiet geval van de rico van een secantlijn

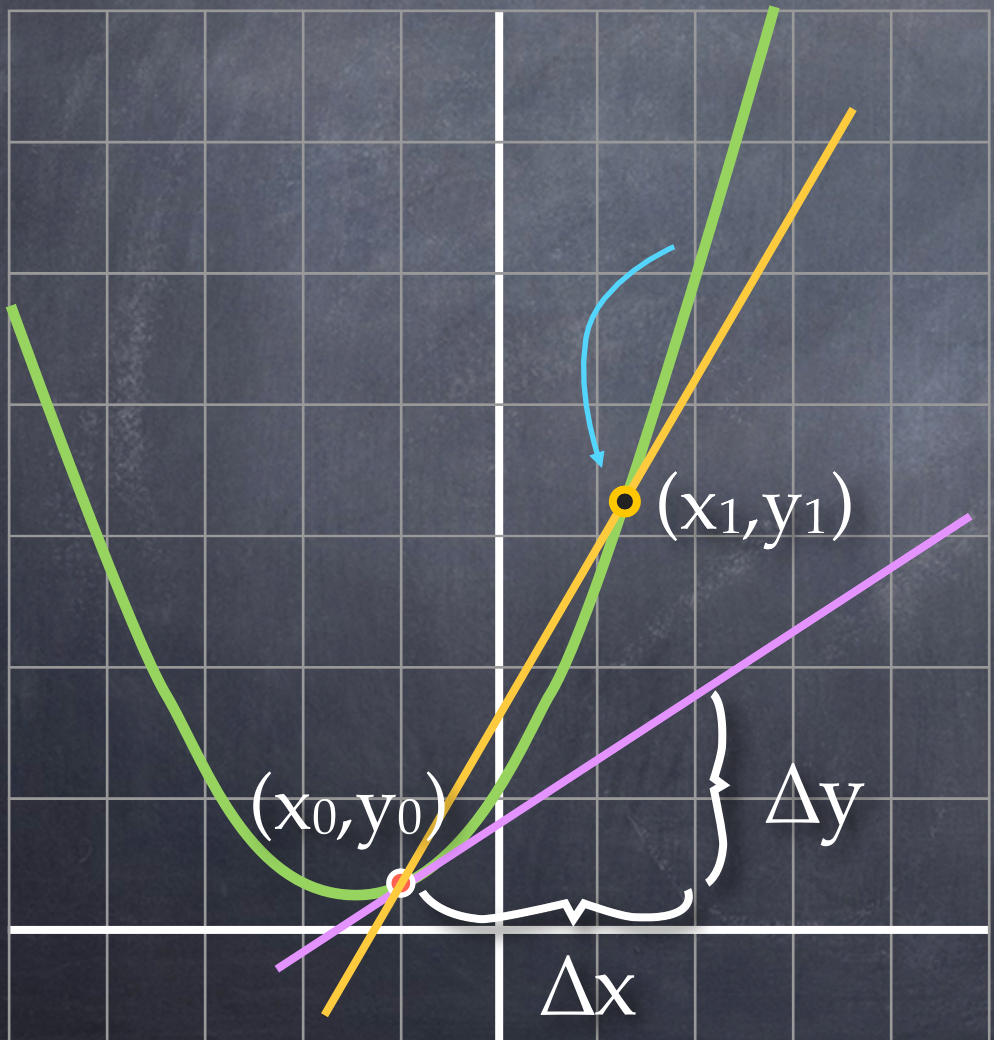


Een secantlijn doorsnijdt een curve in twee punten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{'afgeleide' in}\ \bullet$$

$$\approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

De afgeleide in een punt kan worden bepaald als limiet geval van de rico van een secantlijn

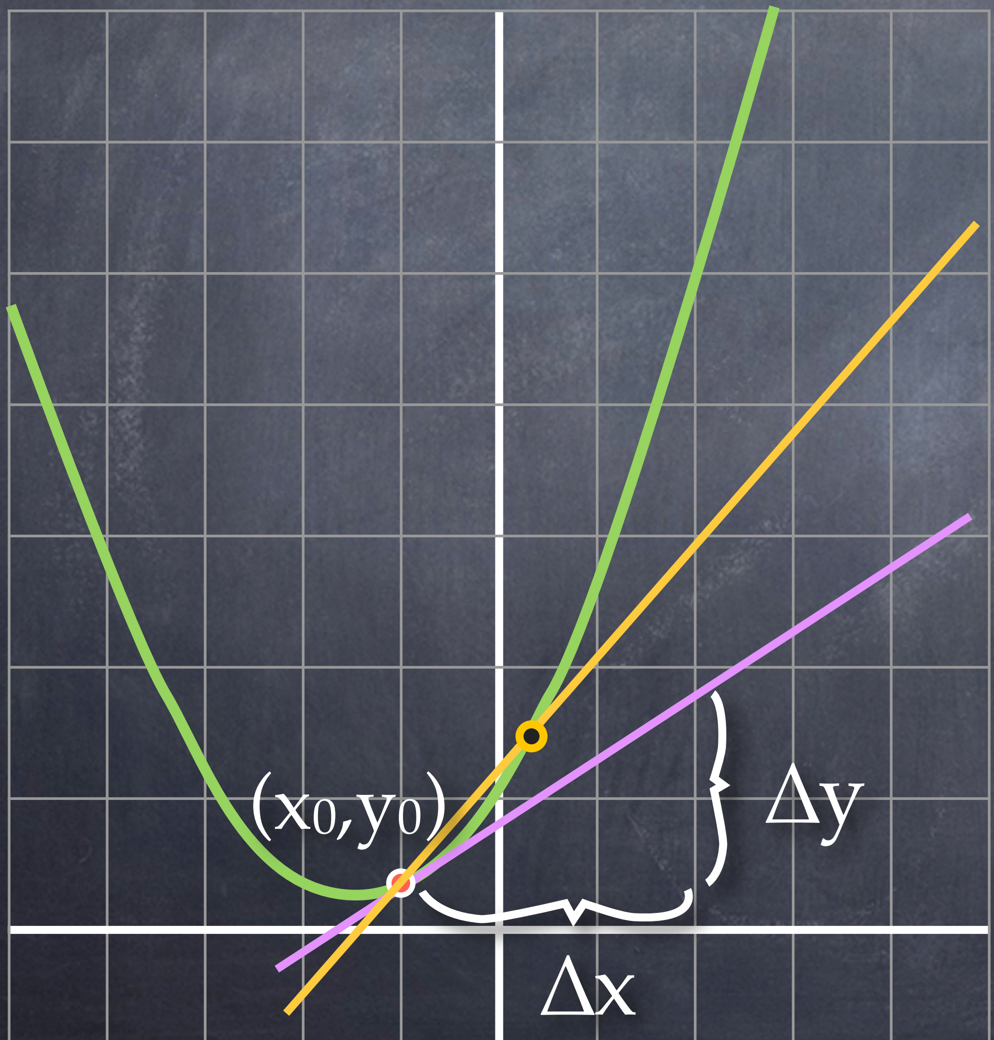


Benadering wordt beter als (x1, y1) dichter bij ligt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{'afgeleide' in}$$

$$\approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

De afgeleide in een punt kan worden bepaald als limiet geval van de rico van een secantlijn

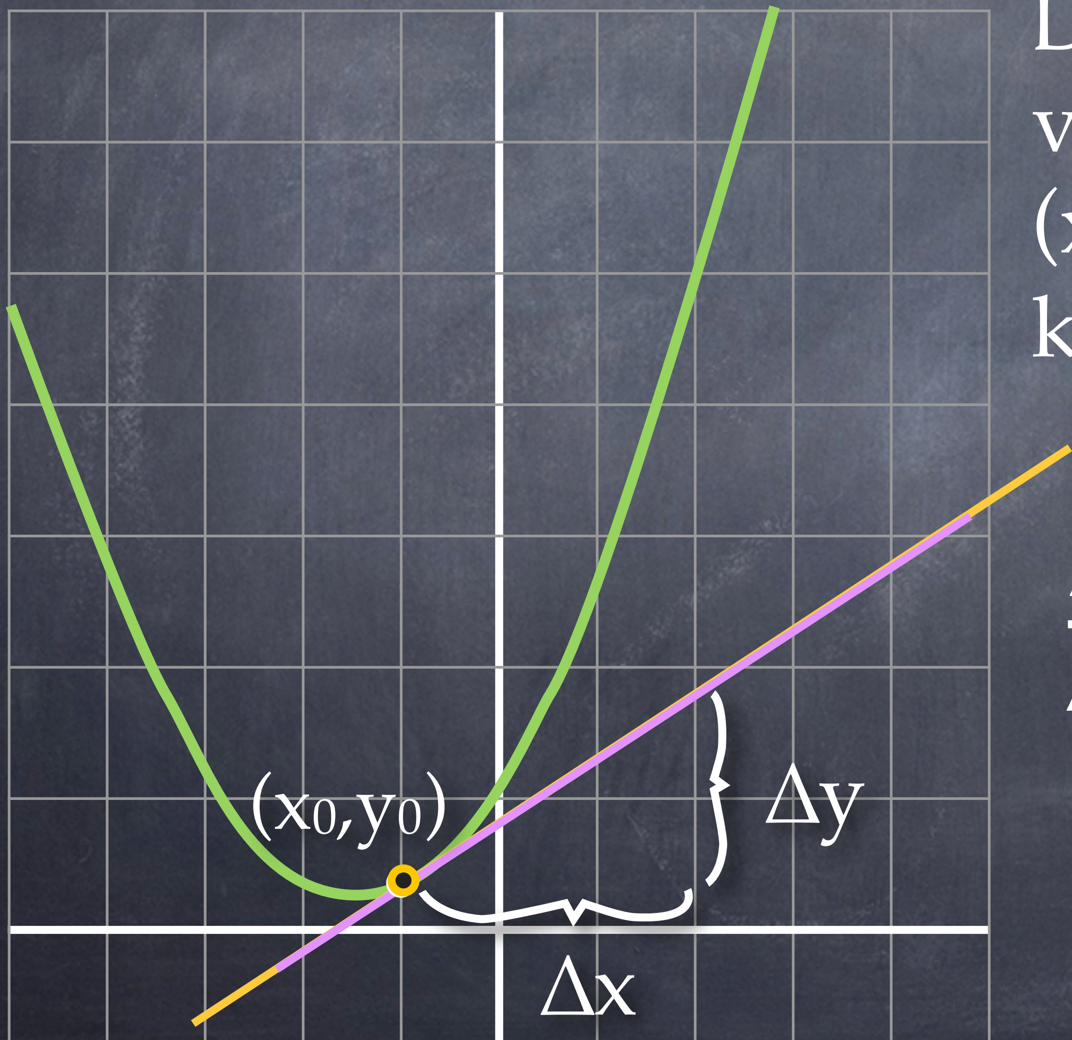


De afgeleide is de limiet van deze benadering als (x_1, y_1) zeer dicht bij • komt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{‘afgeleide’ in} \bullet$$

$$\approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

De afgeleide in een punt kan worden bepaald als limiet geval van de rico van een secantlijn



De afgeleide is de limiet van deze benadering als (x_1, y_1) zeer dicht bij • komt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{‘afgeleide’ in} \bullet$$

$$= \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Definitie differentieren

We schrijven $f'(x_0)$ voor de afgeleide van een functie f in het punt x_0. Dit is per definitie gegeven door

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Samenvattend zijn er 8 rekenregels voor differentiëren die onthouden moeten worden

$[c]' = 0$

$[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$

$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$[x^r]' = r \cdot x^{r-1}$

vandaag

Kunnen we hier de afgeleiden van nemen?

We bespreken vijf elementaire functies:

- polynomen (veeltermen) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$
- rationale functies $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 + x - 4}$
- absolute waarde functie $f(x) = |x|$
- exponentiële functie $f(x) = a^x$
- faculteit functie $f(n) = n!$

Programma vandaag

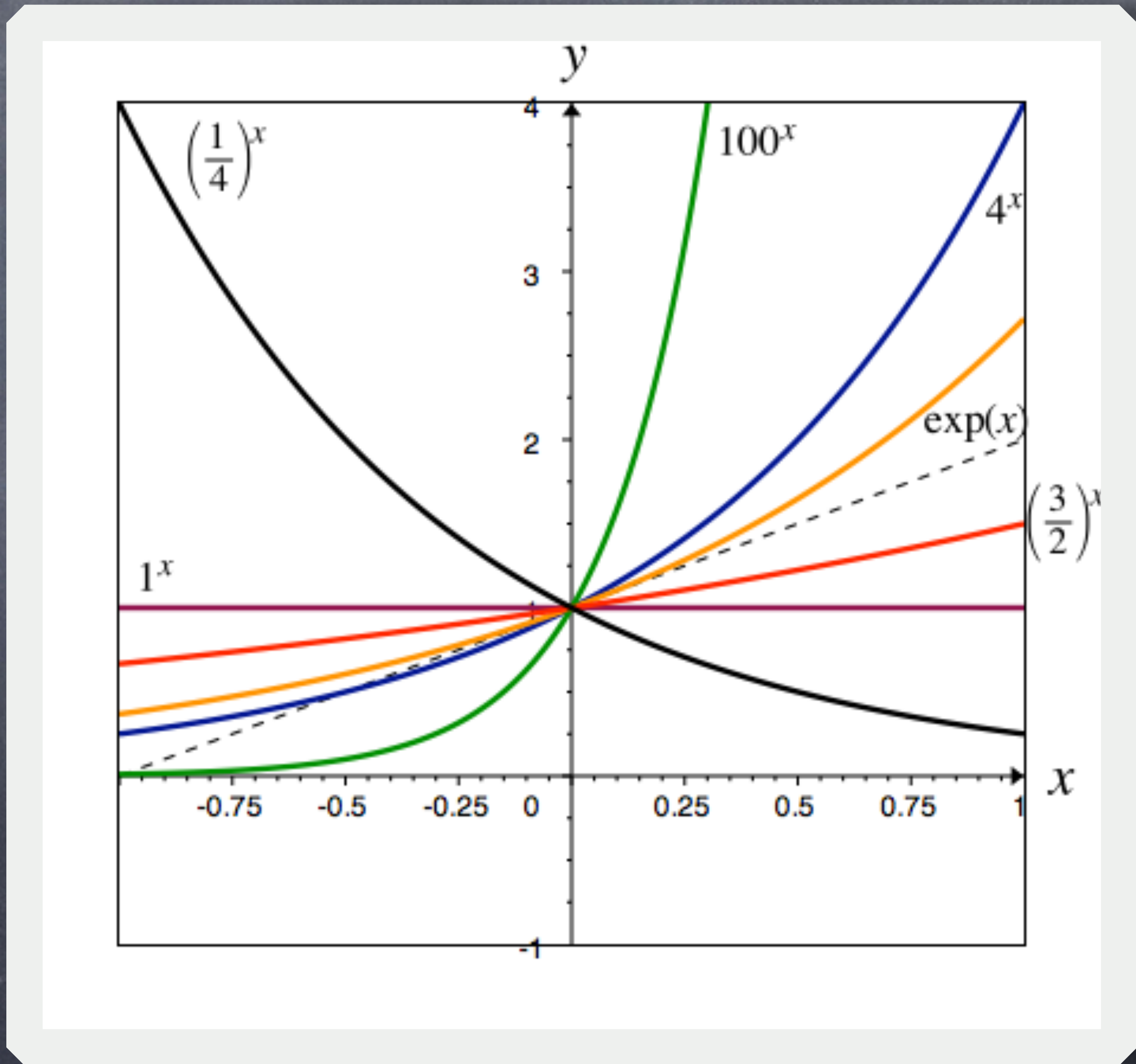
- Samenvatting: differentieren
- Het getal e
- De afgeleide van ln(x)
- Kettingregel
- Optimaliseren
- Approximeren
- Integreren

Exponentiële functies zijn altijd positief en stijgen steeds sneller of dalen steeds langzamer

een exponentiële functie heeft de vorm

$$f(x) = a^x$$

a is positief



Definitie differentieren

We schrijven $f'(x_0)$ voor de afgeleide van een functie f in het punt x_0. Dit is per definitie gegeven door

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

De afgeleide van een exponentiële functie is proportioneel aan zichzelf

Wat is de afgeleide van $f(x) = a^x$?

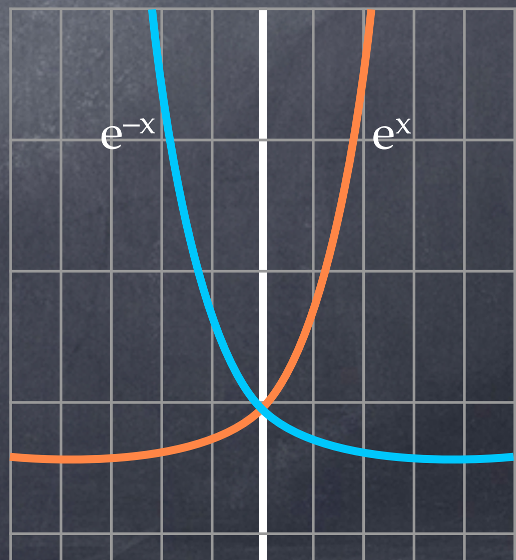
$$f'(x) = [a^x]' = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

$$= a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h}$$

$$= a^x \cdot f'(0)$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot f'(0)$$



De afgeleide van een exponentiële functie is proportioneel aan zichzelf

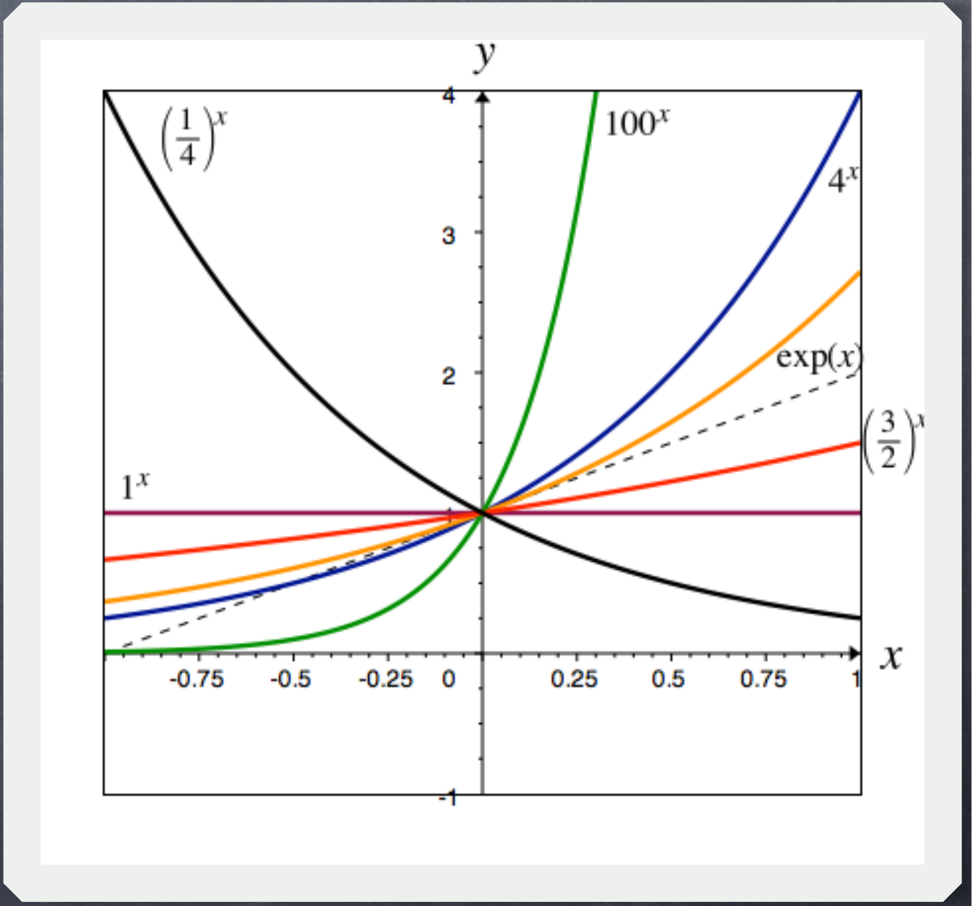
We willen een a vinden dusdanig dat f′(0)=1

$$f'(x) = a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h}$$

$$= a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$$

Truc: Vervang h=1/n



De afgeleide van een exponentiële functie is proportioneel aan zichzelf

We willen een a vinden dusdanig dat f′(0)=1

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} n(a^{1/n} - 1) = 1$$

Herschrijven leidt tot de volgende kandidaat a:

$$a = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Bestaat dit wel? Is dit wel een getal als n oneindig groot wordt?

Is deze $a = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ zo gedefinieerd eindig?

Invullen n:

$a_2 = (1+1/2)^2 = 1 + 2\,(1/2) + (1/2)^2 = 2{,}25$

$a_3 = (1+1/3)^3 = 1 + 3\,(1/3) + 3(1/3)^2 + (1/3)^3 = 2{,}37$

$a_4 \approx 2{,}44$ $a_{10} \approx 2{,}59$ $a_{50} \approx 2{,}69$ $a_{250} \approx 2{,}7128$

$a_5 \approx 2{,}49$ $a_{20} \approx 2{,}65$ $a_{100} \approx 2{,}70$ $a_{500} \approx 2{,}7157$

Hoe groter n, $a_{n-1} < a_n$ hoe groter de uitkomst:
als n naar oneindig gaat, gaat a_n dan naar oneindig?

Is deze $a = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ zo gedefinieerd eindig?

Algemeen:

$$a_n = 1 + \frac{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots$$

Zo gedefinieerd krijgen we een oneindige som

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \boxed{\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \ldots\ldots}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Kleiner dan

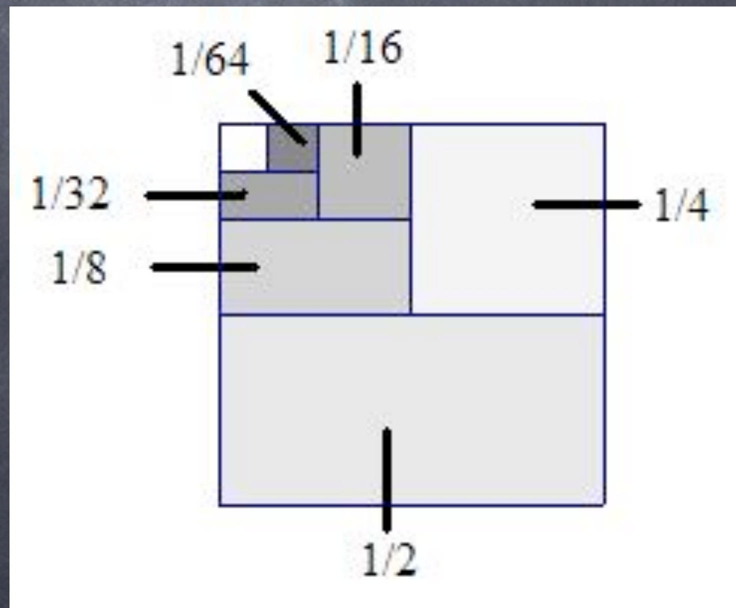
1/2

Kleiner dan 1/4

Kleiner dan $1/2^3$

Kleiner dan $1/2^4$

Kleiner dan $1/2^5$



Dus $a = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ zo gedefinieerd is eindig

Dus $a_n < a_{n+1}$, dus a_n groeit steeds als n groeit, echter, kan an niet groter worden dan 3. Dus komt Weten we dat an naar een eindig getal convergeert, dus het bestaat. Dit getal noemen we e (Euler's getal).

$$e = \lim_{n \to \infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Dit getal e is dus zo geconstrureerd dat

$$f(x) = e^x = \exp(x)$$

zichzelf als afgeleide heeft, want

$$f'(x) = e^x \underbrace{f'(0)}_{=1 \text{ per constructie}} = e^x$$

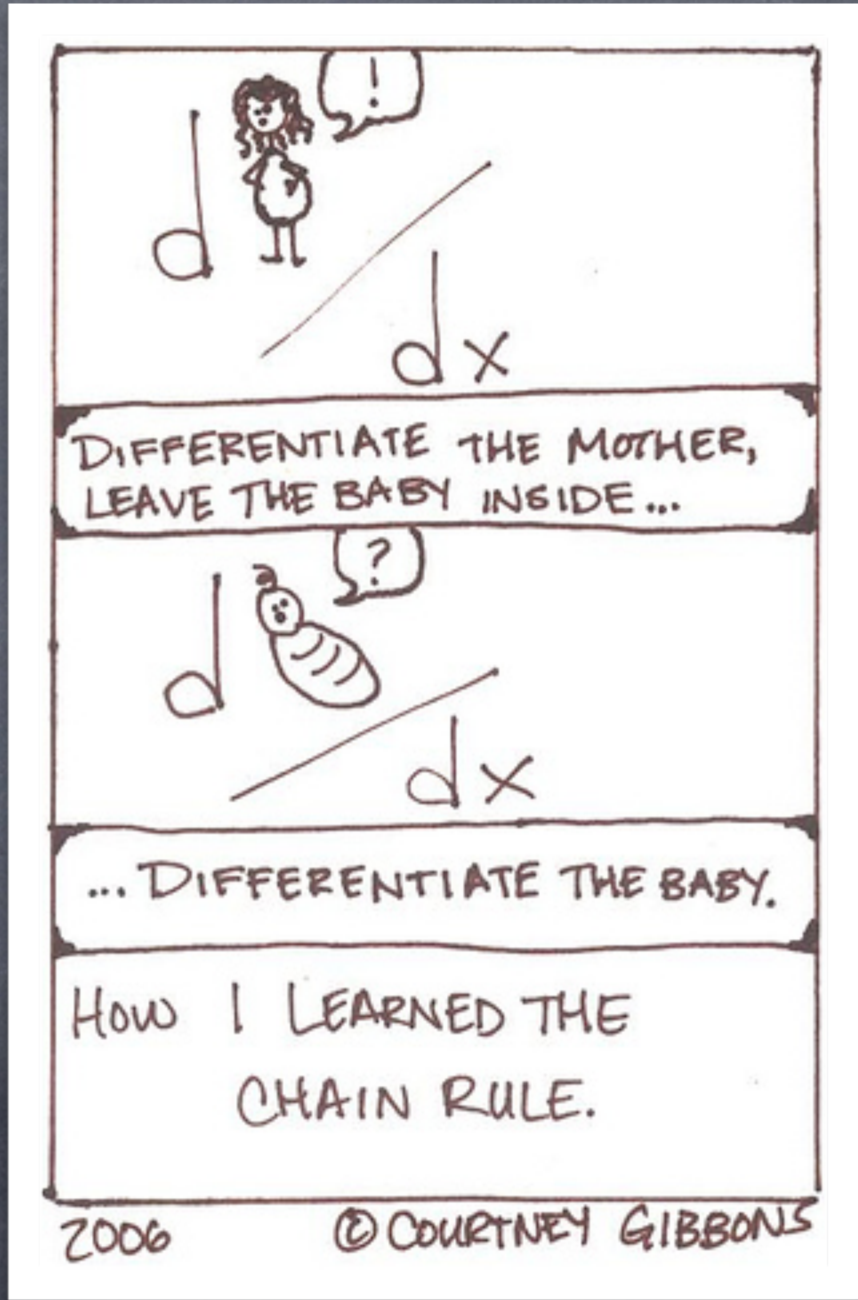
Programma vandaag

- Samenvatting: differentieren
- Het getal e
- Kettingregel
- Afgeleide van ln(x)
- Optimaliseren
- Approximeren
- Integreren

De kettingregel

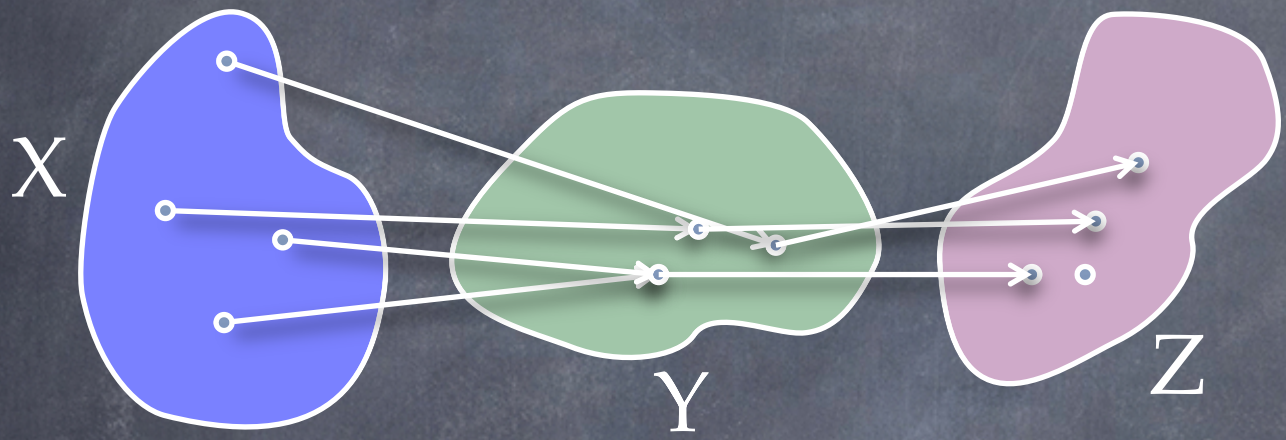
$k(x)=f(g(x))$

$k'(x)=f'(g(x))\ f'(x)$

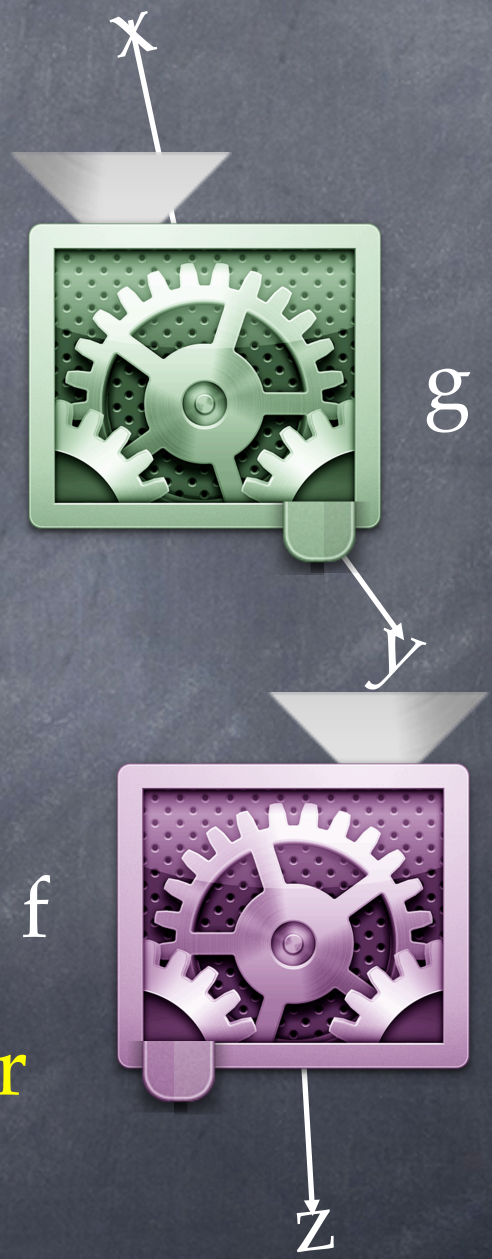


In een samengestelde functie wordt ene functie toegepast op de waarde van de andere

$$k(x) = (f \bullet g)(x) = f(g(x))$$



g: X -> Y f: Y -> Z



Voorbeeld:
Hoe meer tijd ik investeer in het oefenen van het tentamen, hoe hoger mijn eindcijfer, hoe hoger mijn toekomstige carriere kansen

In de kettingregel wordt de baby-functie het argument van de afgeleide moeder-functie

Voorb. baby functie Kettingregel

moeder functie

$$k(x) = x^6 = (x^2)^3 = f(g(x)) \qquad [f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

$z=f(y) = y^3$ moeder

$y=g(x) = x^2$ baby

- differentieer eerst de moeder-functie
- vul dan de babyfunctie onveranderd in
- differentieer tenslotte de baby-functie

$$k'(x) = 3\,(x^2)^2 \cdot \; 2x = 6x^5$$

e is het getal waarmee de afgeleide van de exponentiële functie gelijk is aan zichzelf

Wat is er bijzonder aan e? de afgeleide van e^x

$$f(x) = a^x \quad \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot f'(0)$$

e is het unique getal waarvoor

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow f'(0) = 1$$

Gevolg: $[e^x]' = e^x \cdot 1 = e^x$

$[\exp(x)]' = \exp(x)$

$[a^x]' = [e^{bx}]' \Rightarrow$ kettingregel

De kettingregel wordt gebruikt voor het differentiëren van een functie van een functie

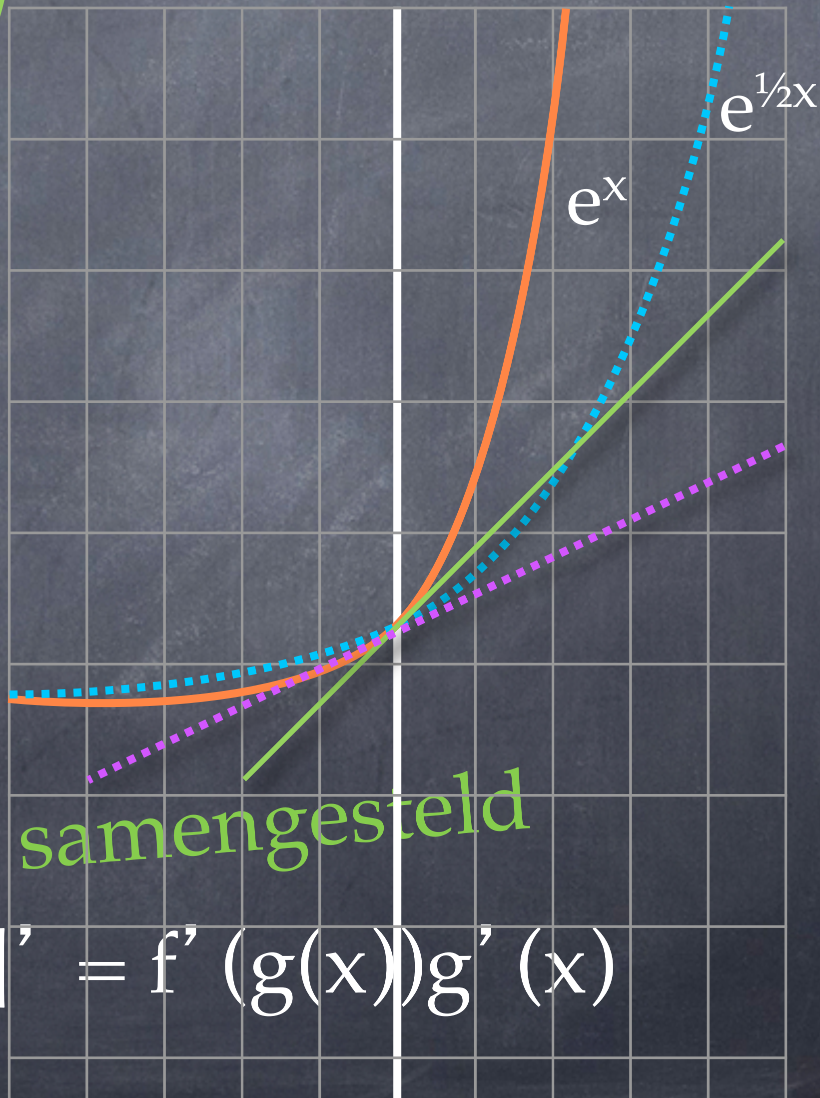
zie het verschil

Voorbeeld

$f(x) = e^x$ $\quad$ $k(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

dan $\quad$ maar $\quad$ dan

$f'(x) = e^x$ $\quad$ $k'(x) \neq e^{\frac{1}{2}x}$



merk op: $k(x) = f(\frac{1}{2}x) = f(g(x))$

kettingregel nodig: $\quad [f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$

In de kettingregel wordt de baby-functie het argument van de afgeleide moeder-functie

Voorb. baby functie Kettingregel

moeder functie

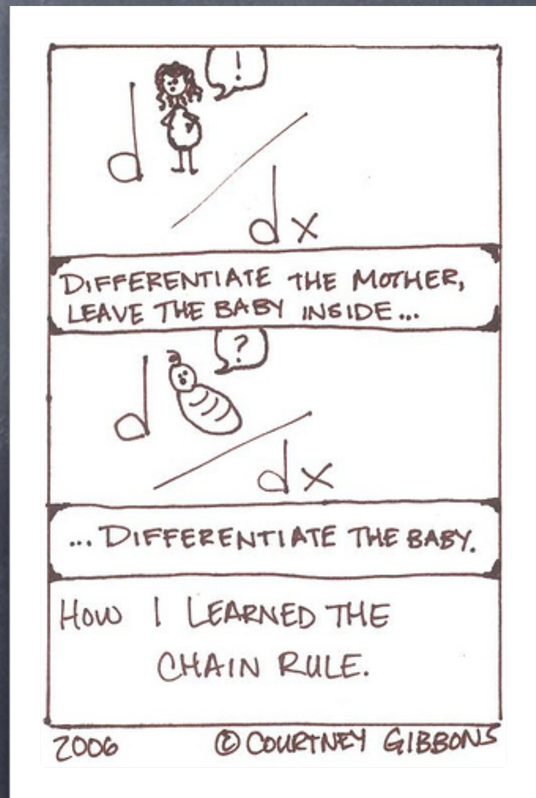
$$k(x) = \exp(\tfrac{1}{2}x) = f(g(x)) \qquad [f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

$z = f(y) = \exp(y)$ moeder

$y = g(x) = \tfrac{1}{2}x$ baby

- differentieer eerst de moeder-functie
- vul dan de babyfunctie onveranderd in
- differentieer tenslotte de baby-functie

$$k'(x) = \exp(\tfrac{1}{2}x) \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\exp(\tfrac{1}{2}x)$$



In de kettingregel wordt de baby-functie het argument van de afgeleide moeder-functie

Voorb. Kettingregel

$k(x) = \exp(\tfrac{1}{2}x + 5) = f(g(x))$ $\quad k'(x) = f'(g(x))g'(x)$

$z = f(y) = \exp(y)$ moeder

$y = g(x) = \tfrac{1}{2}x + 5$ baby

- differentieer eerst de moeder-functie
- vul dan de babyfunctie onveranderd in
- differentieer tenslotte de baby-functie

$k'(x) = \exp(\tfrac{1}{2}x + 5) \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\exp(\tfrac{1}{2}x + 5)$

In de kettingregel wordt de baby-functie het argument van de afgeleide moeder-functie

Voorb. Kettingregel

$k(x) = e^{½x^2 + 5} = f(g(x))$ $k'(x) = f'(g(x))g'(x)$

$f(x) = e^x$ moeder

$g(x) = ½x^2 + 5$ baby

- differentieer eerst de moeder-functie
- vul dan de babyfunctie onveranderd in
- differentieer tenslotte de baby-functie

$k'(x) = e^{(½x^2 + 5)} \cdot (½ \cdot 2x + 0) = x \cdot e^{½x^2 + 5}$

In de kettingregel wordt de baby-functie het argument van de afgeleide moeder-functie

Voorb.

Kettingregel

$k(x) = (2x^2 + 1)^{10} = f(g(x))$

$k'(x) = f'(g(x))g'(x)$

$f(x) = x^{10}$

uitvermenigvuldigen ondoenlijk

$g(x) = 2x^2 + 1$

$k'(x) = 10 \cdot (2x^2 + 1)^{10-1} \cdot (2 \cdot 2x + 0)$

$= 40x \cdot (2x^2 + 1)^9$

Programma vandaag

- Samenvatting: differentieren
- Het getal e
- Kettingregel
- Afgeleide van ln(x)
- Optimaliseren
- Approximeren
- Integreren

Natuurlijk logaritme nemen, ln(x), is het omgekeerde van exponentiëren met grondtal e

Het logaritme van een getal y geeft de exponent voor een grondtal a om y te krijgen

$$a^{\log(y)} = y$$

Als a = e gebruikt men vaak de notatie ln

$$e^{\ln(y)} = y$$

Handig om te onthouden:

$$e^{\ln(x)} = x \qquad \text{en} \qquad \ln(e^x) = x$$

Truc: we vinden de afgeleide van ln(x) op basis van de identiteit en de kettingregel

$e^{\ln(x)} = x$ en $\ln(e^x) = x$

pas de ketting regel toe $[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$k(x) = e^{\ln(x)} = f(g(x))$ maar ook

$f(x) = e^x$ $k(x) = x$

$g(x) = \ln(x)$

$k'(x) = e^{(\ln(x))}\cdot[\ln(x)]' = x\cdot\ln'(x)$ $k'(x) = 1$

dus $x\cdot[\ln(x)]' = 1$ of $[\ln(x)]' = \dfrac{1}{x}$

De afgeleiden van e^x en ln(x) geven de afgeleide van de algemene machtsfunctie

Voorb.

$$k(x) = x^r = e^{r \cdot \ln(x)} = f(g(x))$$

$$f(x) = e^x$$

$$g(x) = r \cdot \ln(x)$$

Kettingregel

$$k'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$k'(x) = e^{(r \cdot \ln(x))} \cdot [r \cdot \ln(x)]' = x^r \cdot r \cdot [\ln(x)]'$$

$$= x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = r \cdot x^{r-1}$$

$$\therefore x^r = r \cdot x^{r-1}$$

Samenvattend zijn er 8 rekenregels voor differentiëren die onthouden moeten worden

$[c]' = 0$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$

$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$[x^r]' = r \cdot x^{r-1}$

afgeleiden speciale functies

$[e^x]' = e^x$

$[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$

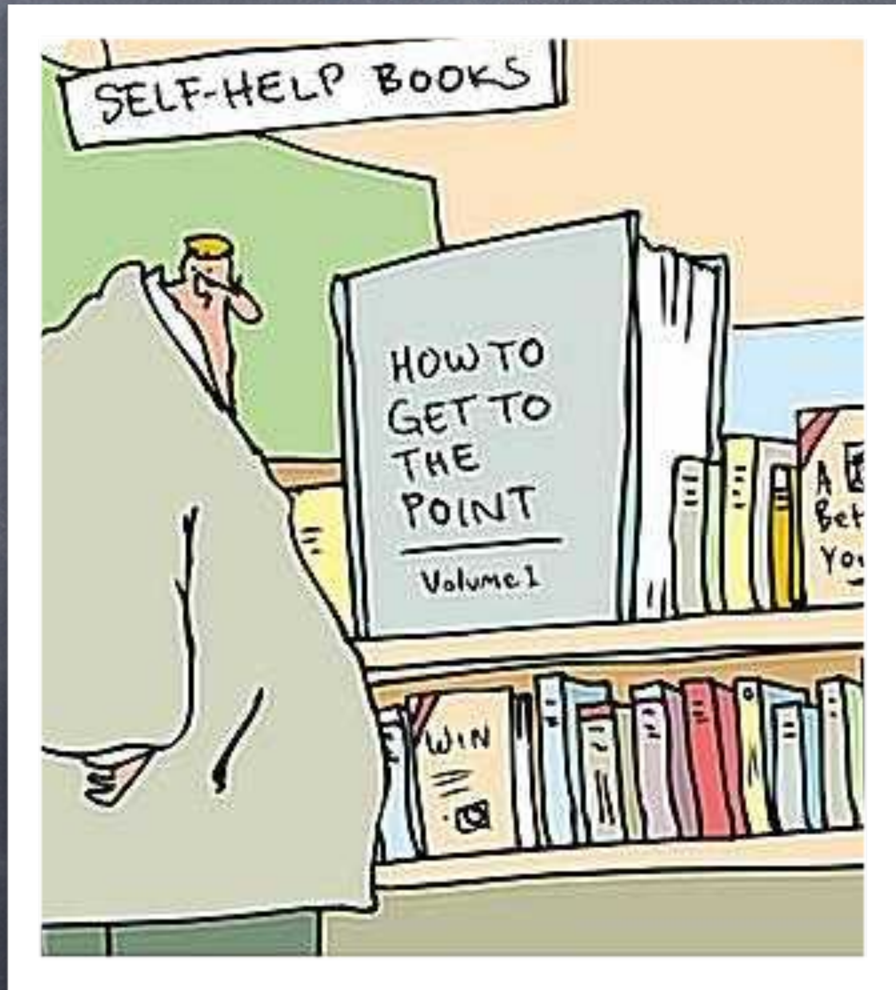
Hiermee kun je deze klasse van functies (en hun inversen als ze bestaan) differentieren

- polynomen (veeltermen) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$
- rationale functies $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 + x - 4}$
- absolute waarde functie $f(x) = |x|$
- exponentiële functie $f(x) = a^x$

Programma vandaag

- Samenvatting: differentieren
- Het getal e
- Kettingregel
- Afgeleide van ln(x)
- Optimaliseren
- Approximeren
- Integreren

Vinden van extremen

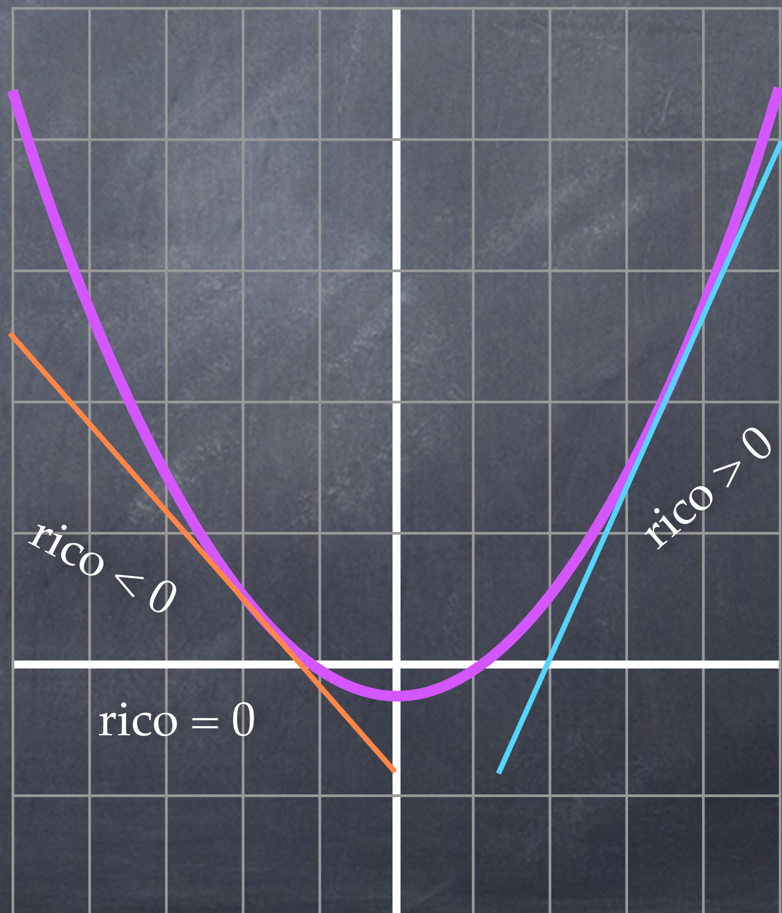


Afgeleiden beschrijven het gedrag van een functie onder veranderende input

de afgeleide geeft de rico van de raaklijn

- als f'(x) positief is neemt f(x) toe met x
- als f'(x) negatief is neemt f(x) af met x
- wat nu als f'(x) = 0?

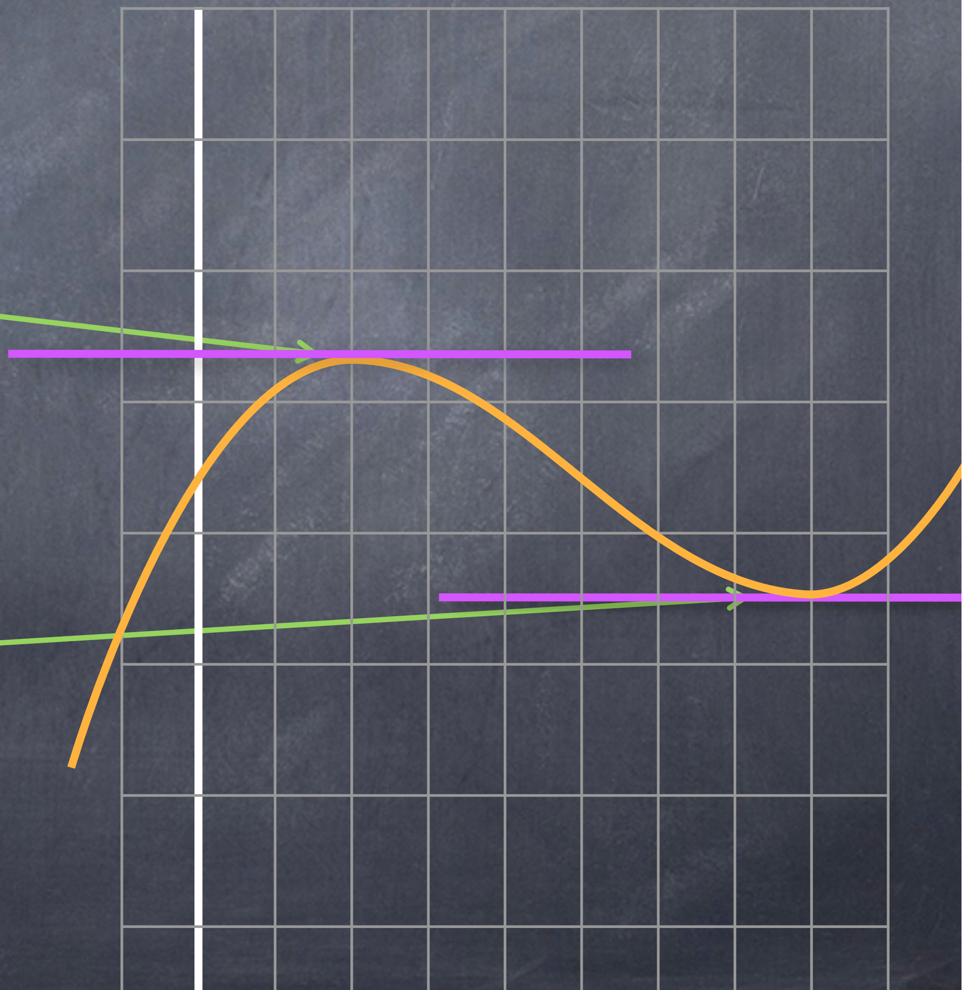
raaklijn horizontaal;
f(x) veranderd niet



Waar een functie een lokaal maximum of minimum heeft is de afgeleide 0

Maximum als $f'(x_0) = 0$
én $f'(x) > 0$ voor $x < x_0$
én $f'(x) < 0$ voor $x > x_0$

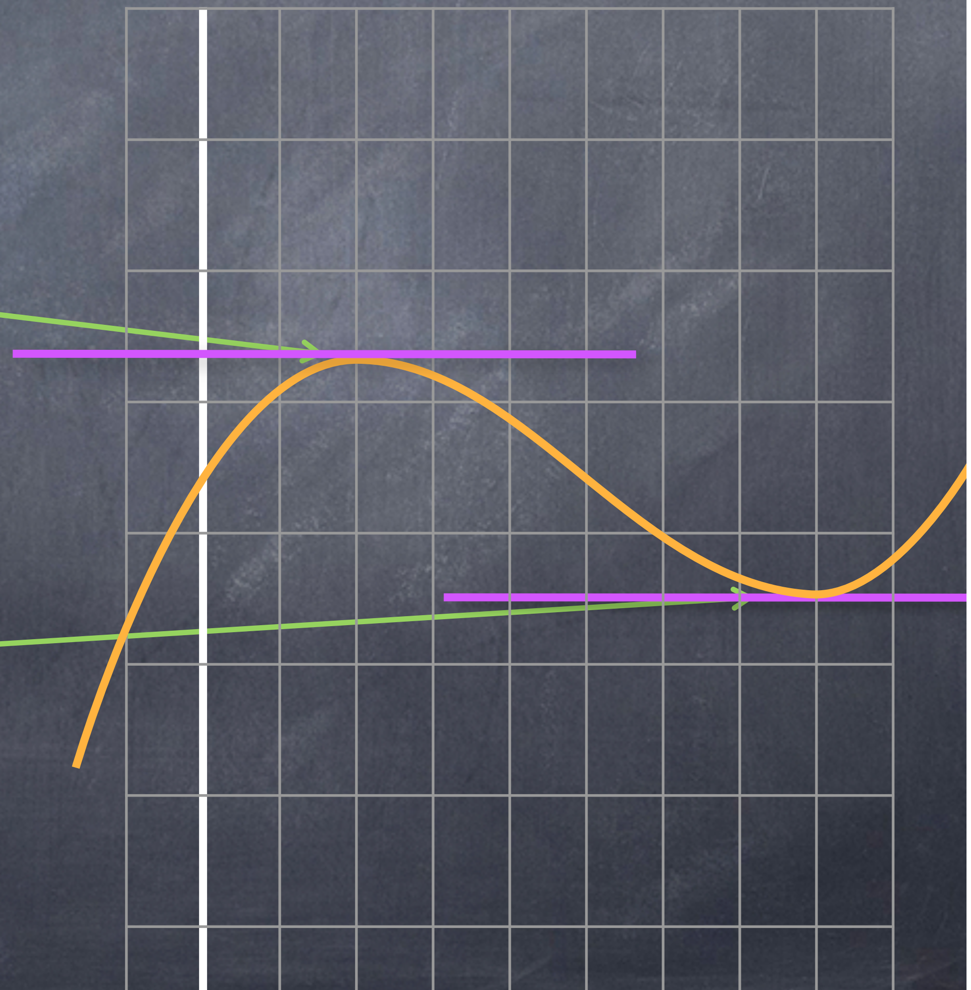
Minimum als $f'(x) = 0$
en $f'(x) < 0$ voor $x < x_0$
en $f'(x) > 0$ voor $x > x_0$



Waar een functie een lokaal maximum of minimum heeft is de afgeleide 0

Alternatief: bereken $f''(x) = D_x f'(x)$

Maximum als $f'(x) = 0$
en $f''(x) < 0$



Minimum als $f'(x) = 0$
en $f''(x) > 0$

Waar een functie een lokaal maximum of minimum heeft is de afgeleide 0

Maximum als $f'(x) = 0$ en $f''(x) < 0$

Minimum als $f'(x) = 0$ en $f''(x) > 0$

Voorb.

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 19$$

$$y' = 6x^2 - 30x + 24$$

we lossen $y' = 0$ op

$$6x^2 - 30x + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 6(x^2 - 5x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 6(x - 1)(x - 4) = 0$$

$\therefore\ x = 1 \ \& \ x = 4$

max? min?

Waar een functie een lokaal maximum of minimum heeft is de afgeleide 0

Maximum als $f'(x) = 0$ en $f''(x) < 0$

Minimum als $f'(x) = 0$ en $f''(x) > 0$

Voorb.

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 19$$

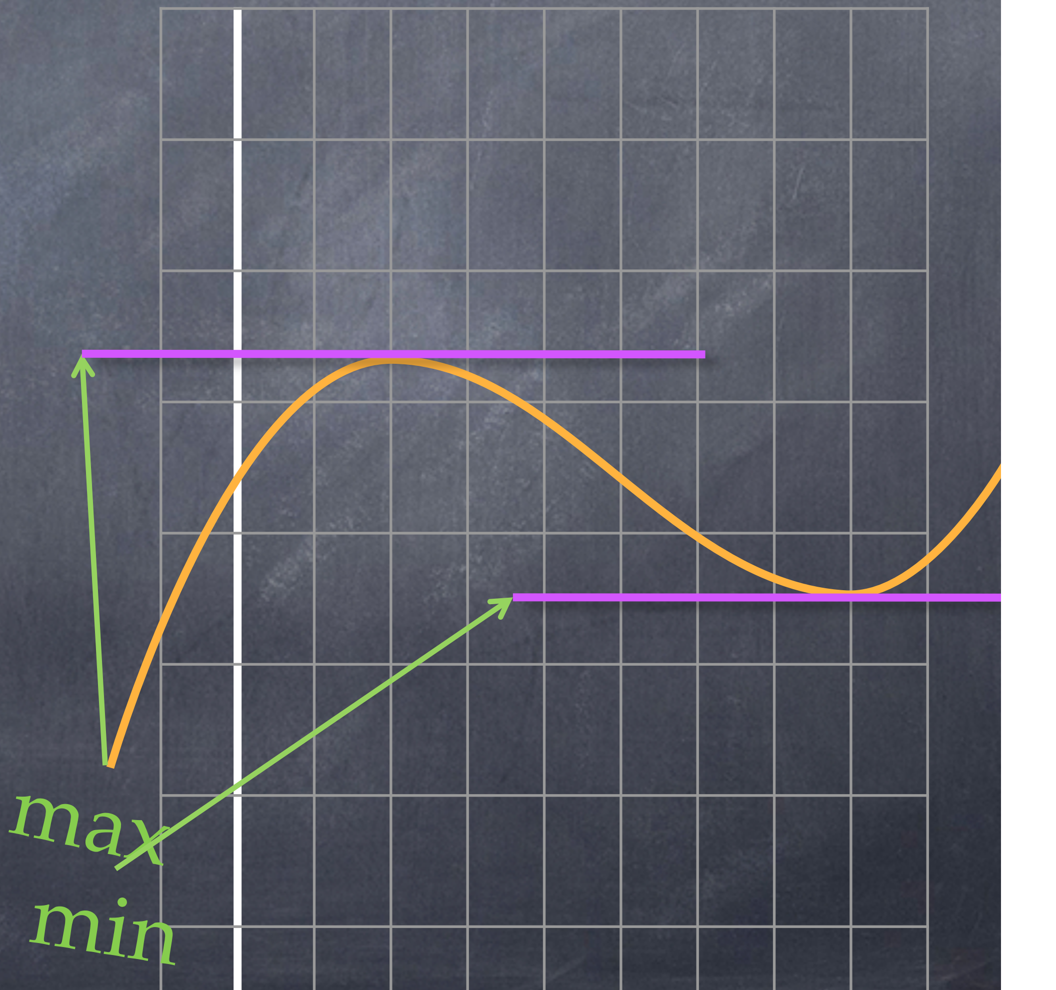
$$y' = 6x^2 - 30x + 24$$

$$\therefore x = 1 \; \& \; x = 4$$

checken met $y'' = 12x - 30$

$$x = 1 \quad \Rightarrow y = 12 \cdot 1 - 30 < 0$$

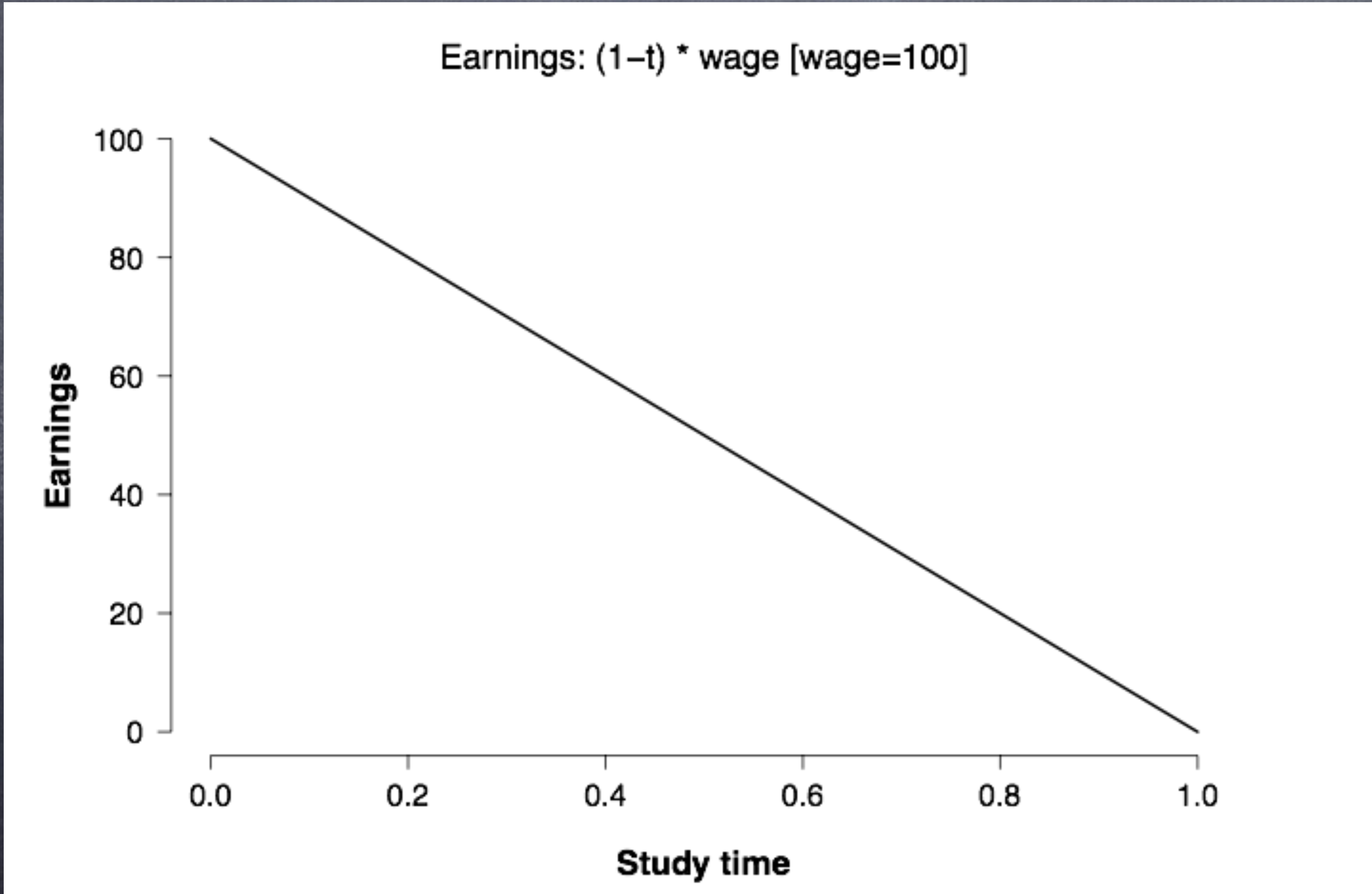
$$x = 4 \quad \Rightarrow y = 12 \cdot 4 - 30 > 0$$



“Optimalisatie” van studie tijd

- Eind punt, “z” (5.6 voor de opdracht) wordt gegeven door: $z=h(y)=2/3\cdot y+28/15$
- Beurzen zijn er om studenten te stimuleren. Hoe hoger je eind score “z” hoe meer beursgeld je krijgt. Je kunt ook je tijd besteden aan je werk en daarmee geld verdienen.
- Afweging van je studie time “t”. Alleen studeren dan zeggen we t=1, alleen werken t=0
  - Utiliteit = $\text{grant}\cdot z(t) + (1-t)\cdot\text{wage}$
- $z=z(t)$

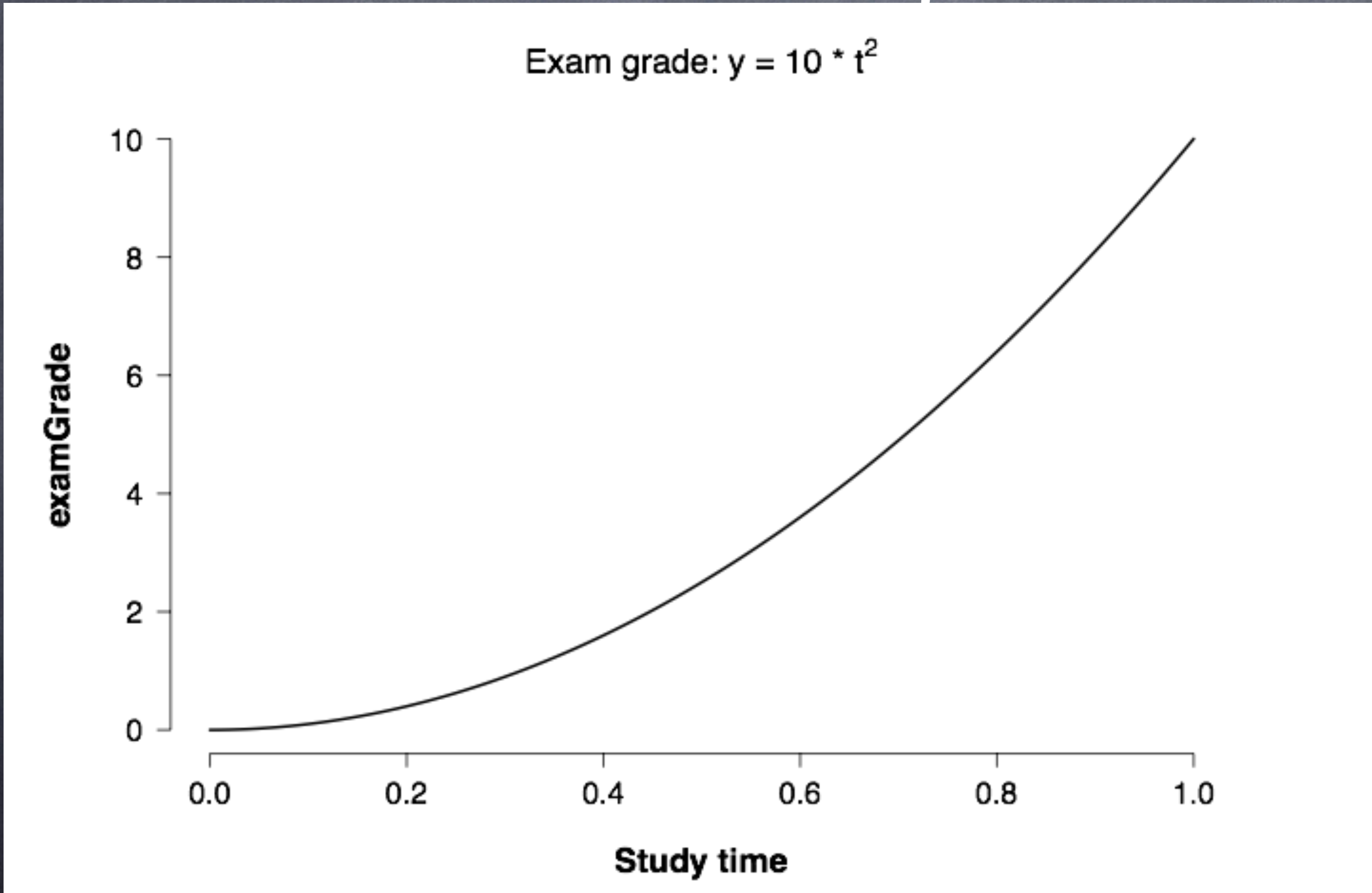
Model tussen studie tijd en loon



Model tussen studie tijd en loon

- Utility = grant $\cdot z(t) + (1-t)\cdot$wage
- Wiskunde kost wat tijd voordat je er in komt. In het begin is de meerwaarde niet zo groot, maar naarmate je meer tijd erin steekt, zul je ook beter presteren.

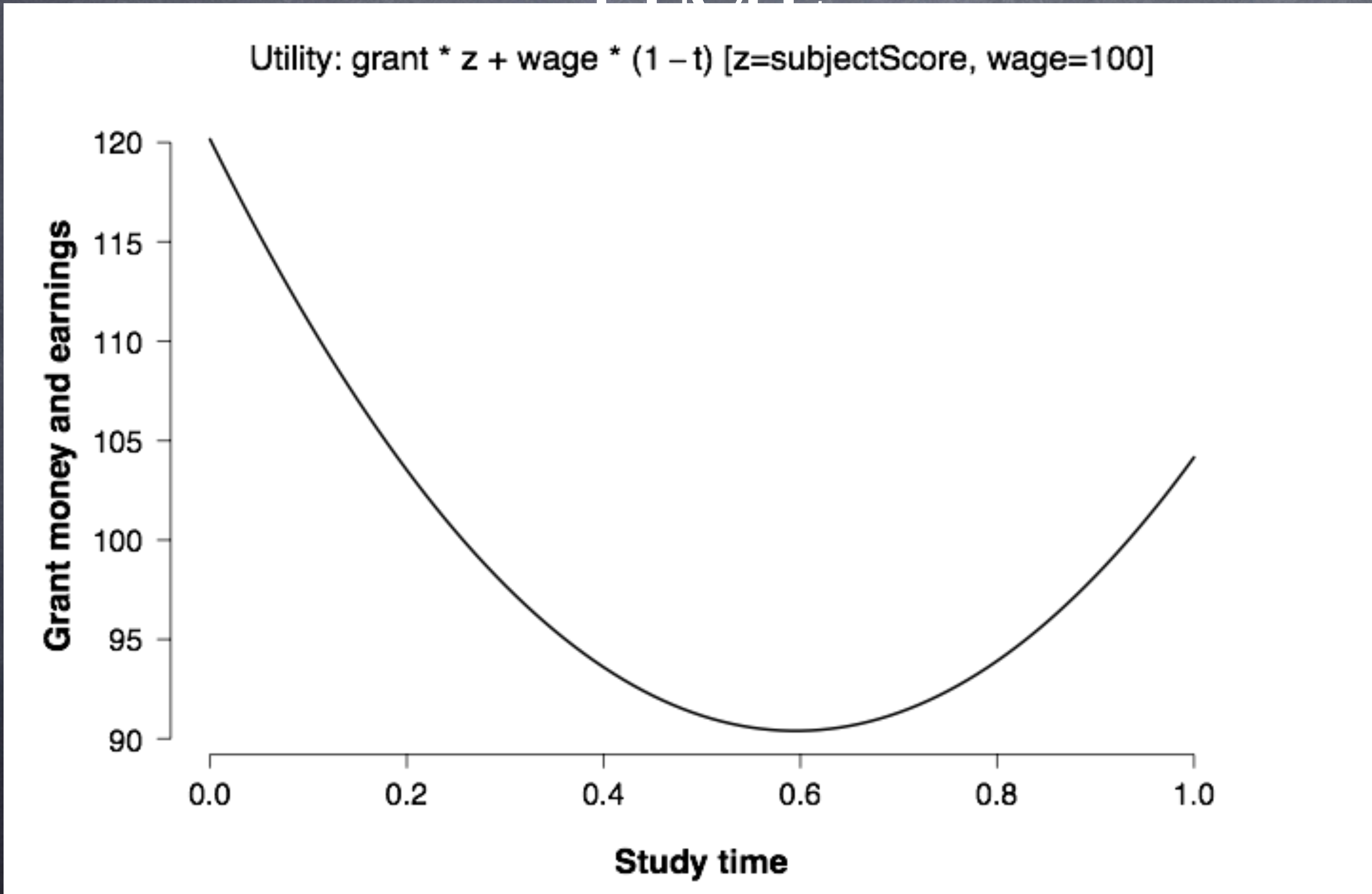
Model tussen studie tijd en tentamencijfer



Combineer de modellen

- Utiliteit= grant $\cdot(2/3 \cdot y(t)+28/15) + (1-t) \cdot$ wage
- Utiliteit= grant $\cdot(2/3 \cdot (10 \cdot t^2)+28/15) + (1-t) \cdot$ wage
- Utiliteit= grant$\cdot 20/3 \cdot t^2$ - wage$\cdot$ t + grant $\cdot 28/15$ + wage
- Zeg, grant=12 (per eindpunt), wage=100
- Utiliteit = $80t^2 - 100t + 122{,}4$
- Wat voor functie is dit? Minimum of maximum?

“OPTIMISING” STUDY TIME



Waar een functie een lokaal maximum of minimum heeft is de afgeleide 0

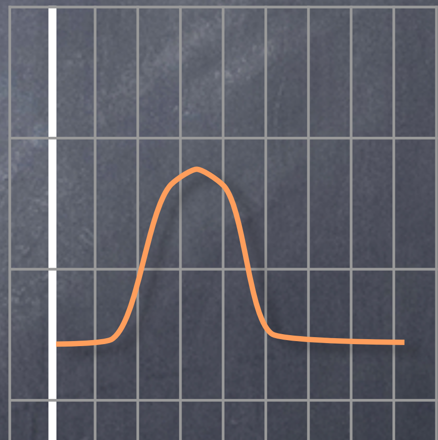
Maximum als $f'(x) = 0$ en $f''(x) < 0$

Minimum als $f'(x) = 0$ en $f''(x) > 0$

Voorb. Item op test, 13 van 40 ppn goed, wat is p?

$$y = p^{13}(1-p)^{40-13}$$

maximum likelihood methode



$$y' = [p^{13}]'(1-p)^{27} + p^{13}[(1-p)^{27}]'$$

$$= 13p^{12}(1-p)^{27} - 27p^{13}(1-p)^{26}$$

$$= 0 \Leftrightarrow 13p^{12}(1-p)^{27} = 27p^{13}(1-p)^{26}$$

$$\Leftrightarrow 13/27\,(1-p) = p$$

$$\Leftrightarrow 13/27 = (1 + 13/27)\,p$$

$$\boxed{p = \frac{13/27}{1 + 13/27} = \frac{13}{40}}$$

Waar een functie een lokaal maximum of minimum heeft is de afgeleide 0

Maximum als $f'(x) = 0$ en $f''(x) < 0$

Minimum als $f'(x) = 0$ en $f''(x) > 0$

Voorb. Item op test, 13 van 40 ppn goed, wat is p?

$$y = p^{13}(1-p)^{40-13}$$

maximum likelihood methode

$$y' = 13p^{12}(1-p)^{27} - 27p^{13}(1-p)^{26}$$
$$= p^{12}(1-p)^{26}(13-40p)$$

$$\boxed{p = \frac{13}{40}}$$

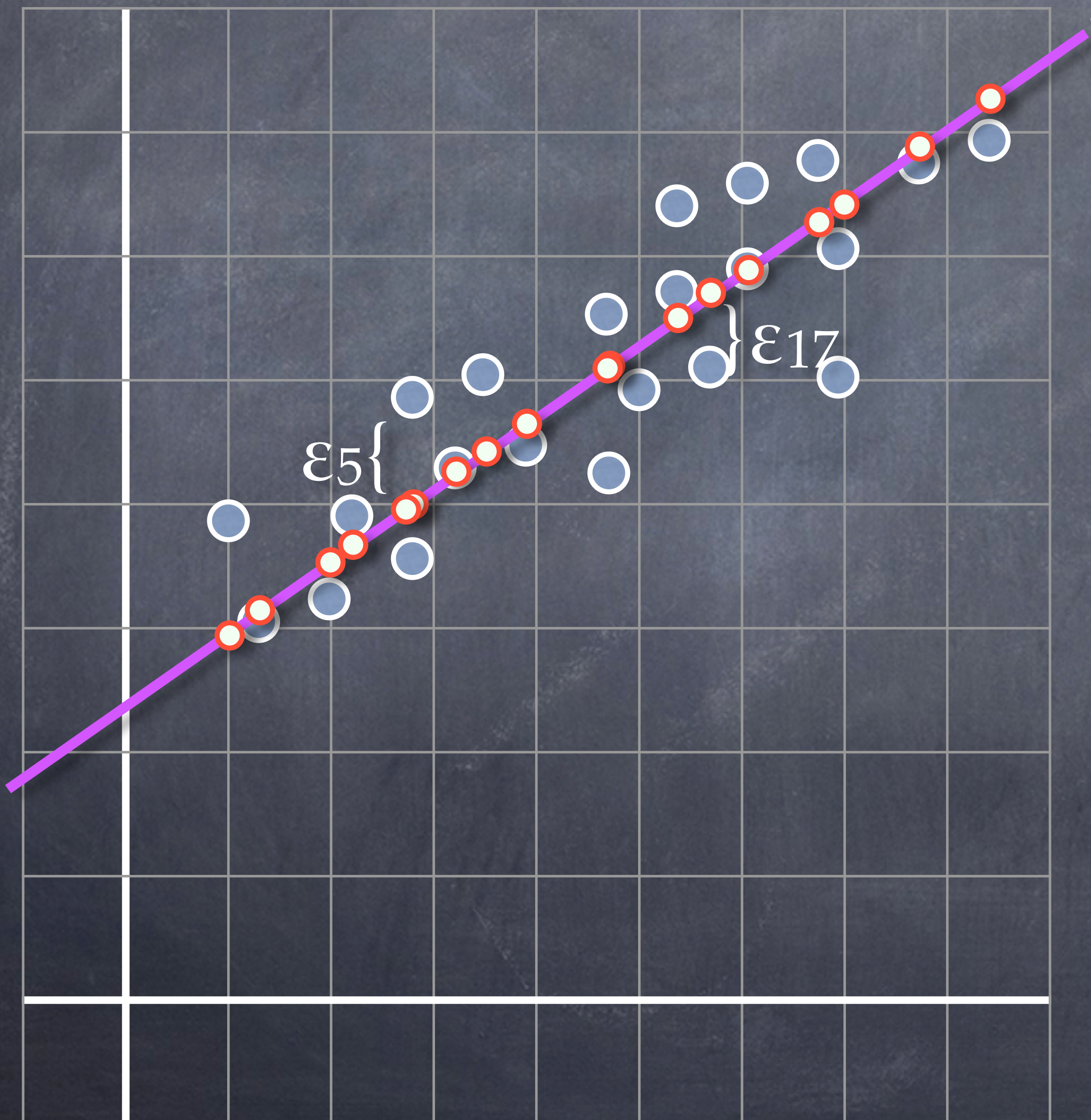
$$y'' = [p^{12}(1-p)^{26}]'(13 - 40p) + p^{12}(1-p)^{26}[13-40p]'$$
$$= 78(1-p)^{25}p^{11}(20p^2 - 13p + 2)$$

maximum!

$$\Rightarrow y'' < 0 \Leftrightarrow 1/4 < p < 2/5$$

$$\boxed{p = 13/40 \Rightarrow y'' < 0}$$

Optimalisatie is een van de sleuteltechnieken in de toegepaste statistiek



$\hat{y}_i = a + bx_i$

$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$

Kies a, b zodat

$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2$

minimaal

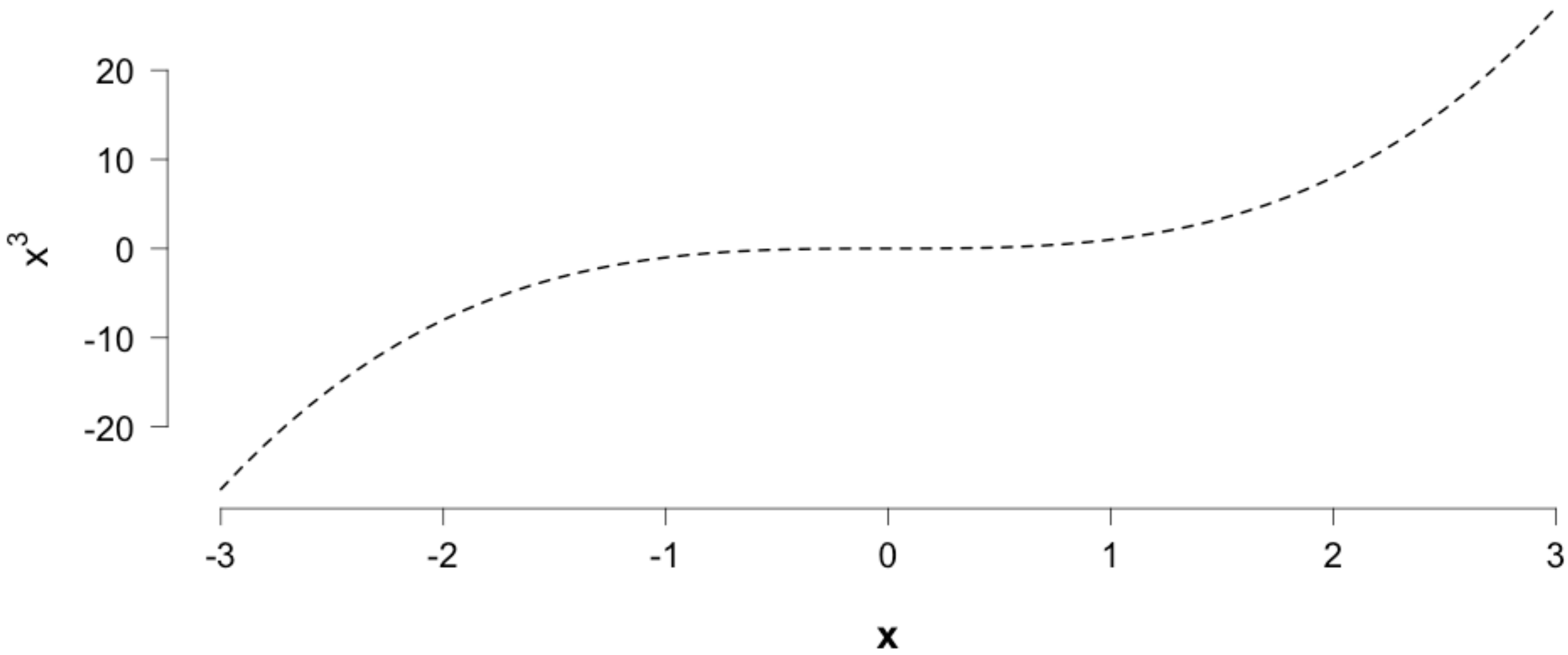
Programma vandaag

- Samenvatting: differentieren
- Het getal e
- Kettingregel
- Afgeleide van ln(x)
- Optimaliseren
- Approximeren
- Integreren

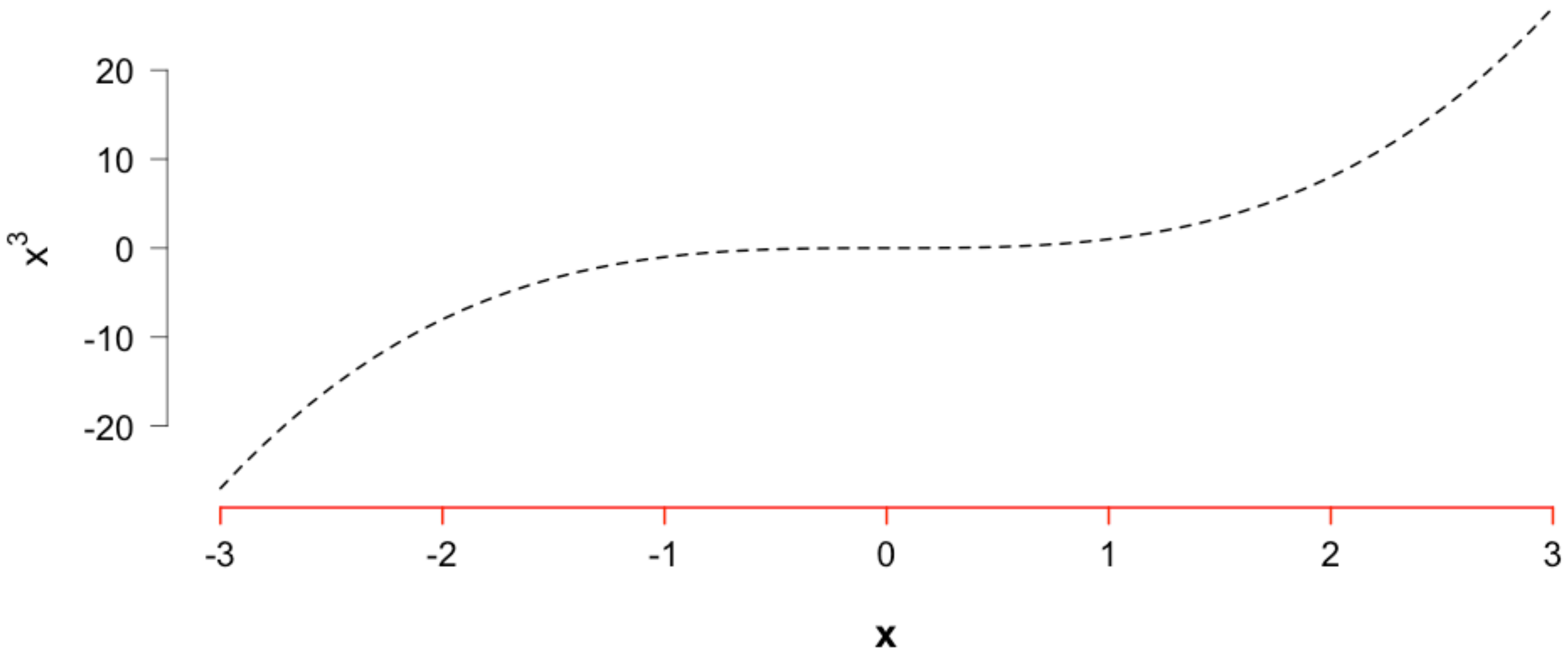
Approximatie van differentieerbare functies

- Om waarden te vinden in de buurt van een functie in een specifiek punt x_0
- $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+O(h^2)$
- h is de stapgrootte

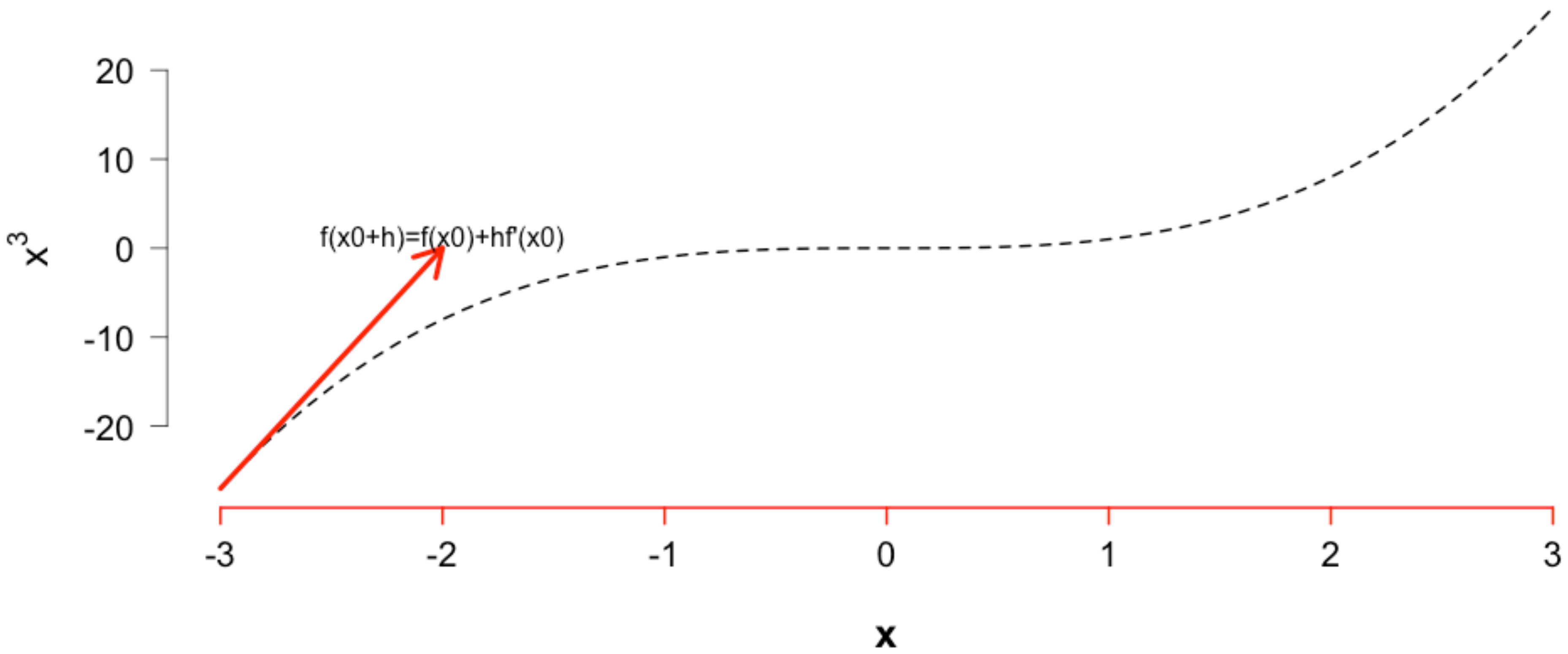
Approximatie van x^3 over het domein [-3, 3]



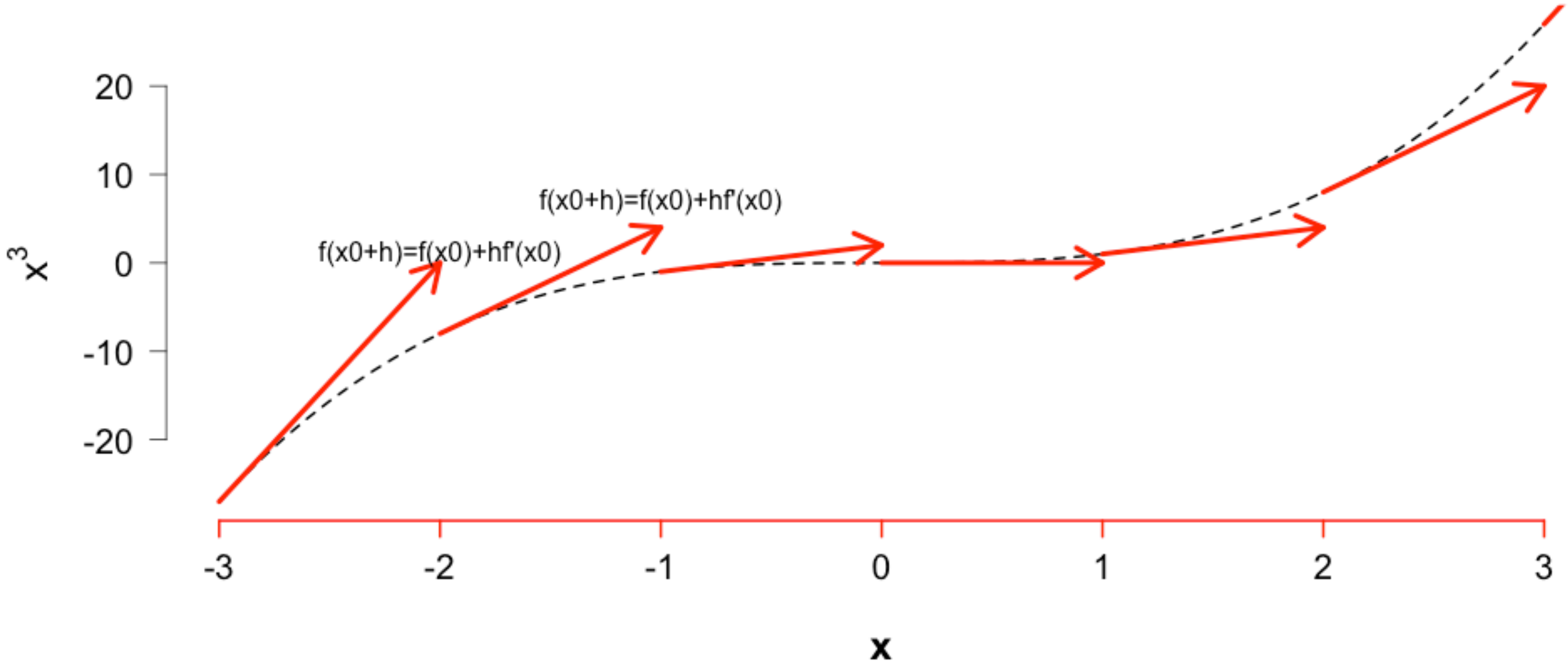
Approximatie van x^3 met stapgrootte h=1



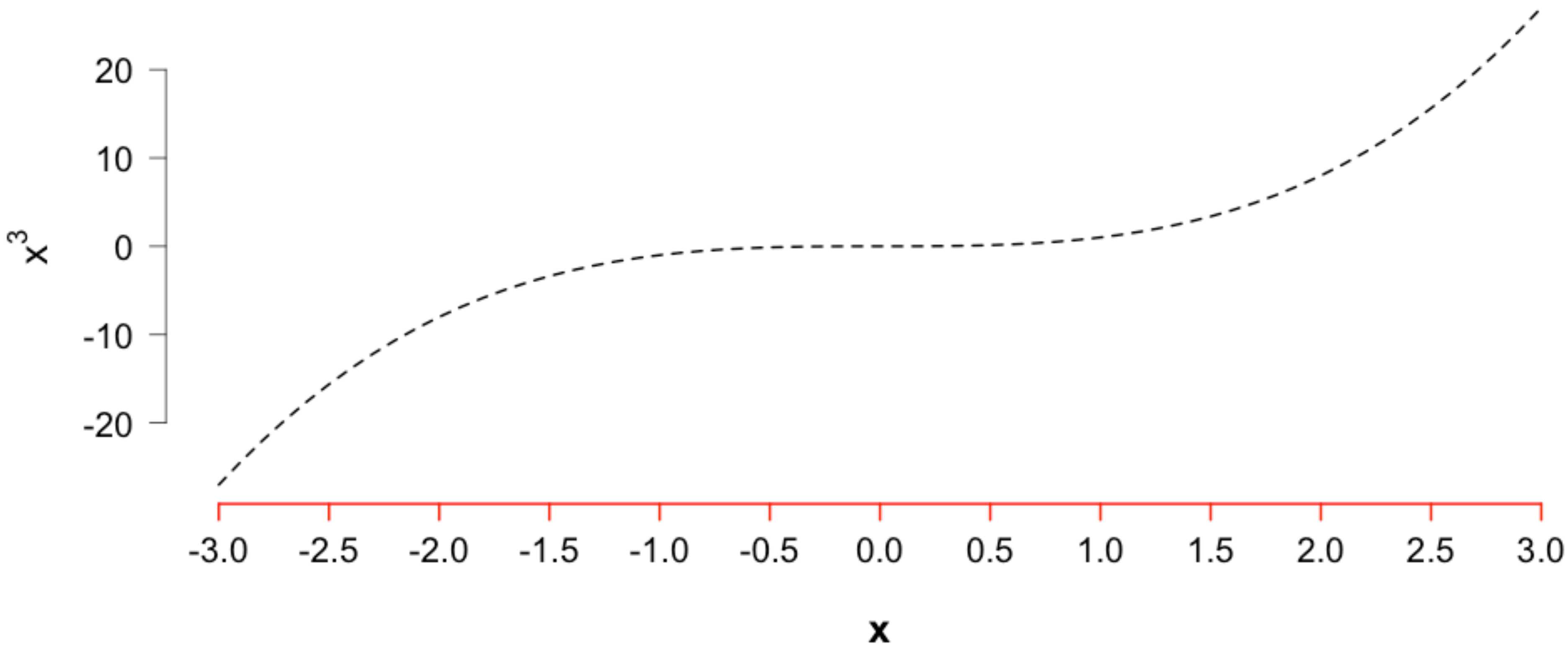
Approximatie van x^3 met stapgrootte h=1



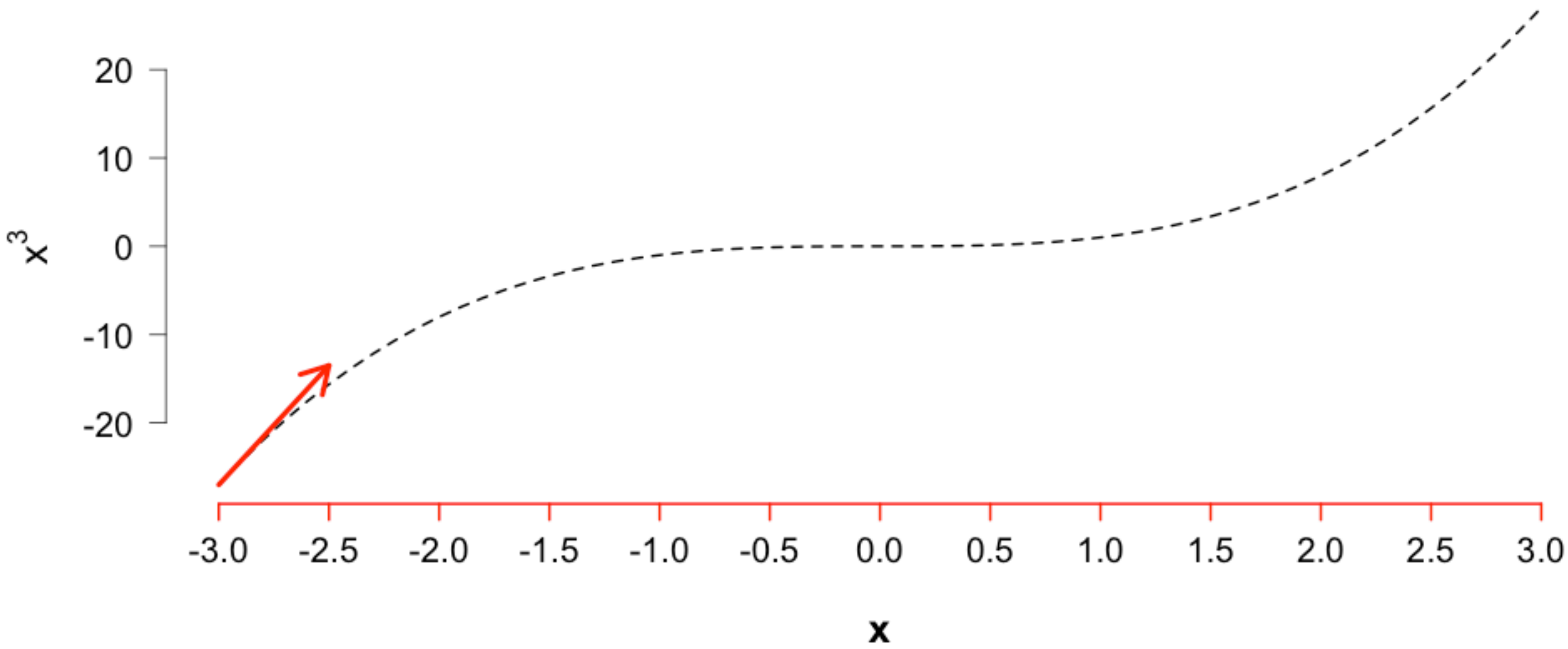
Approximatie van x^3 met stapgrootte h=1



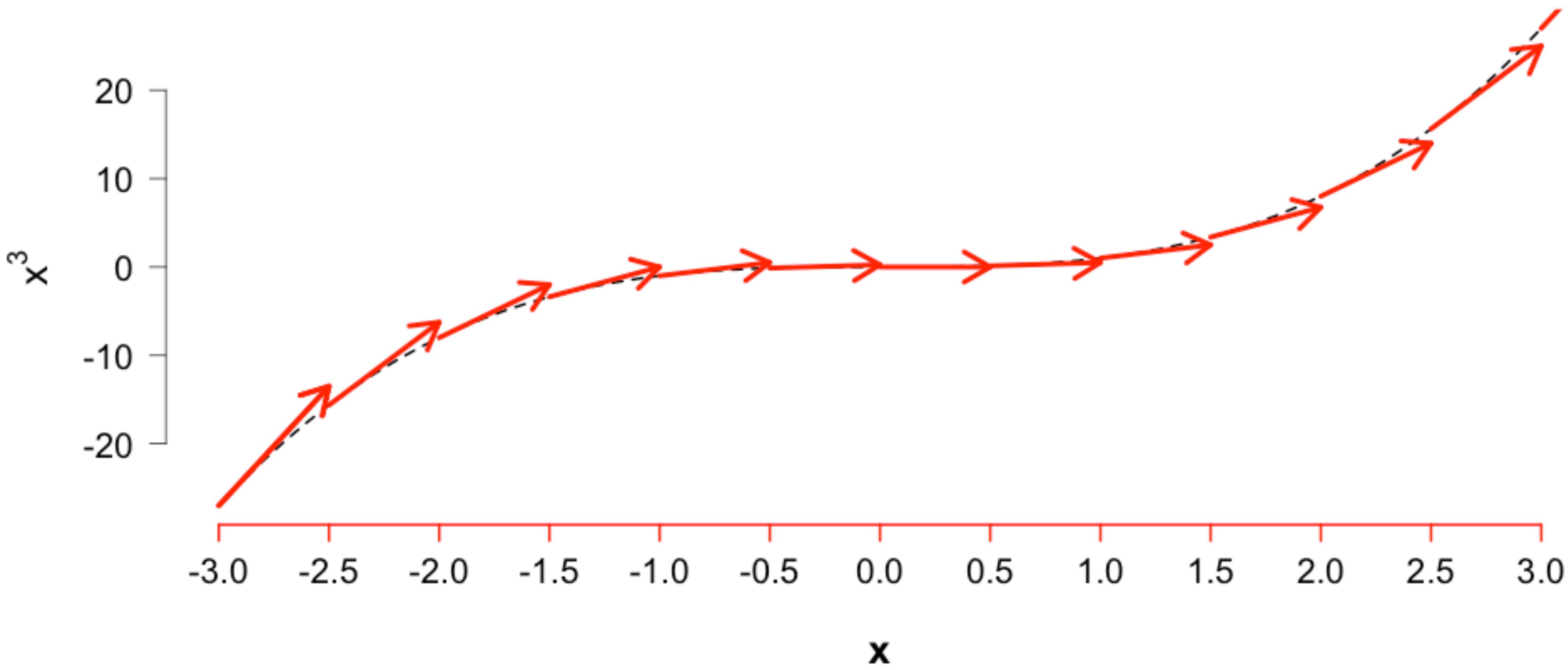
Approximatie van x^3 met stapgrootte h=0.5



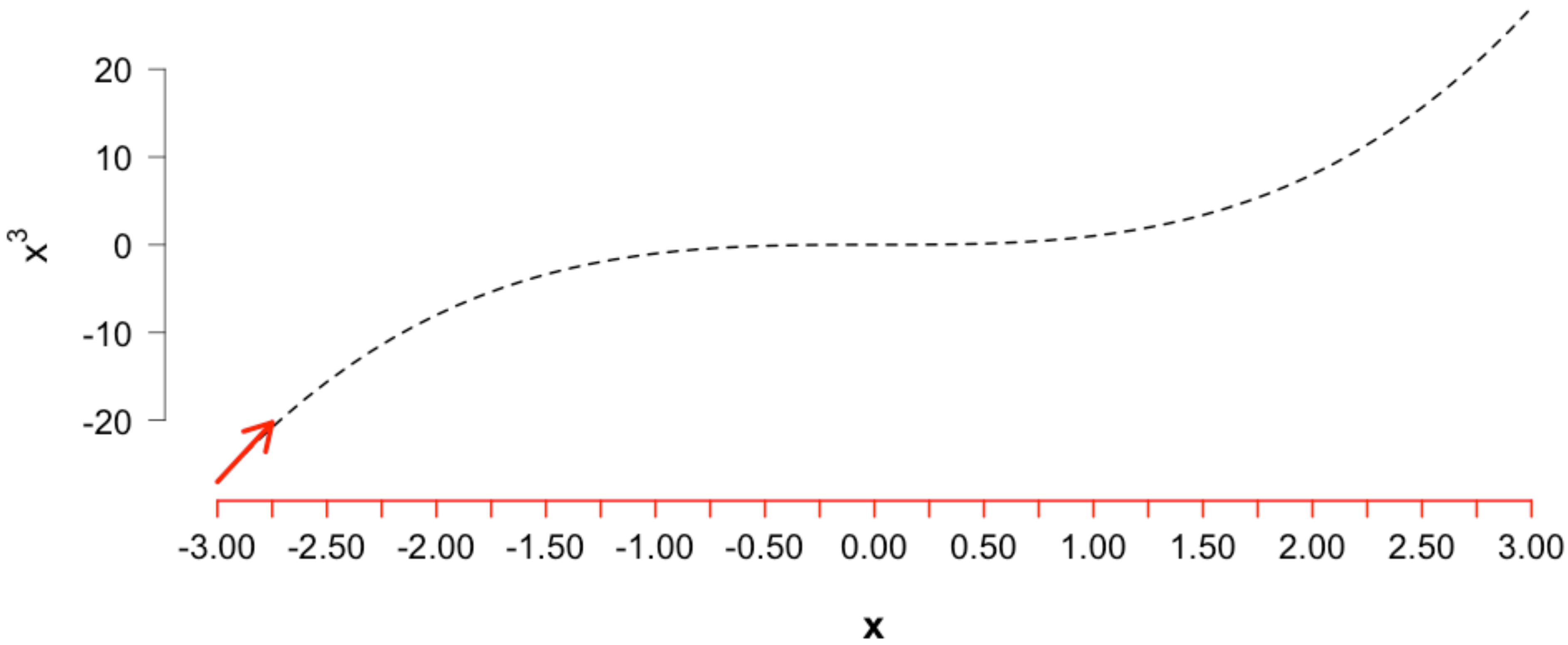
Approximatie van x^3 met stapgrootte $h=0.5$



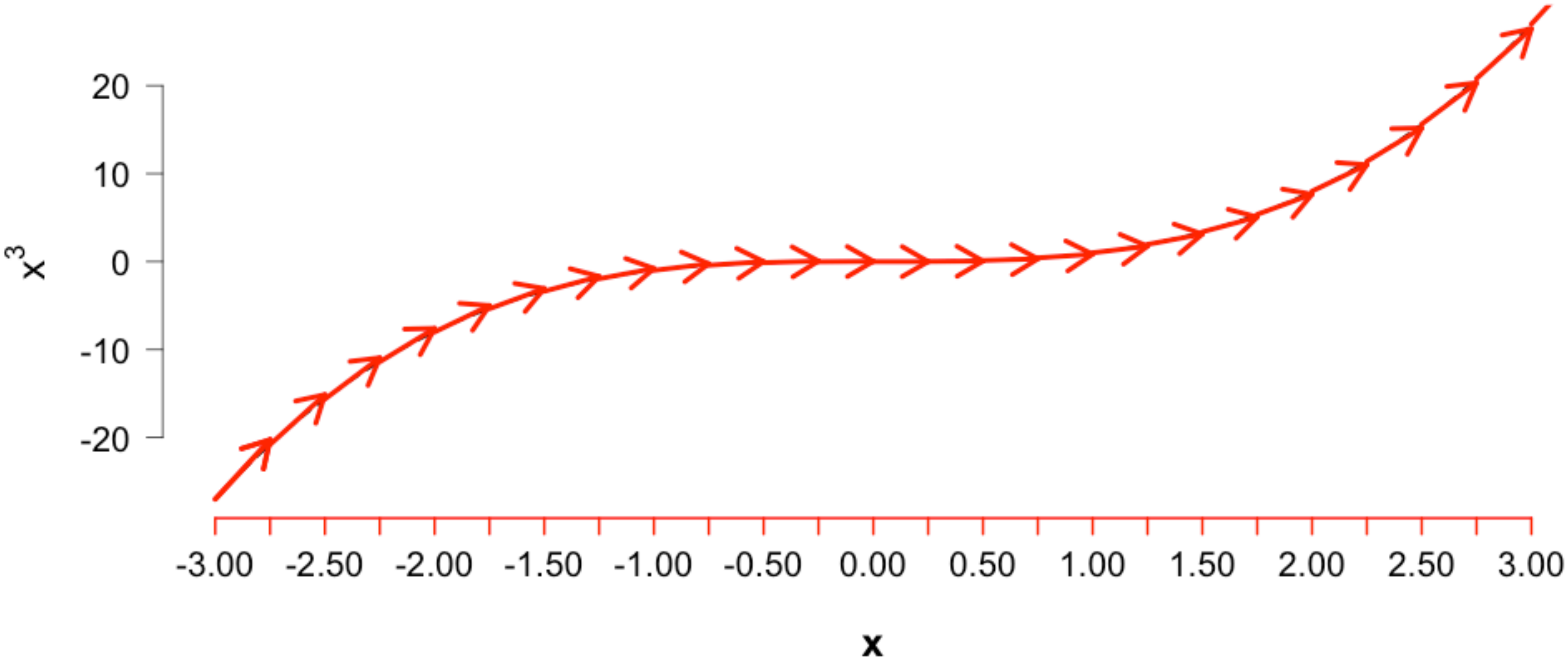
Approximatie van x^3 met stapgrootte h=0.5



Approximatie van x^3 met stapgrootte h=0.25



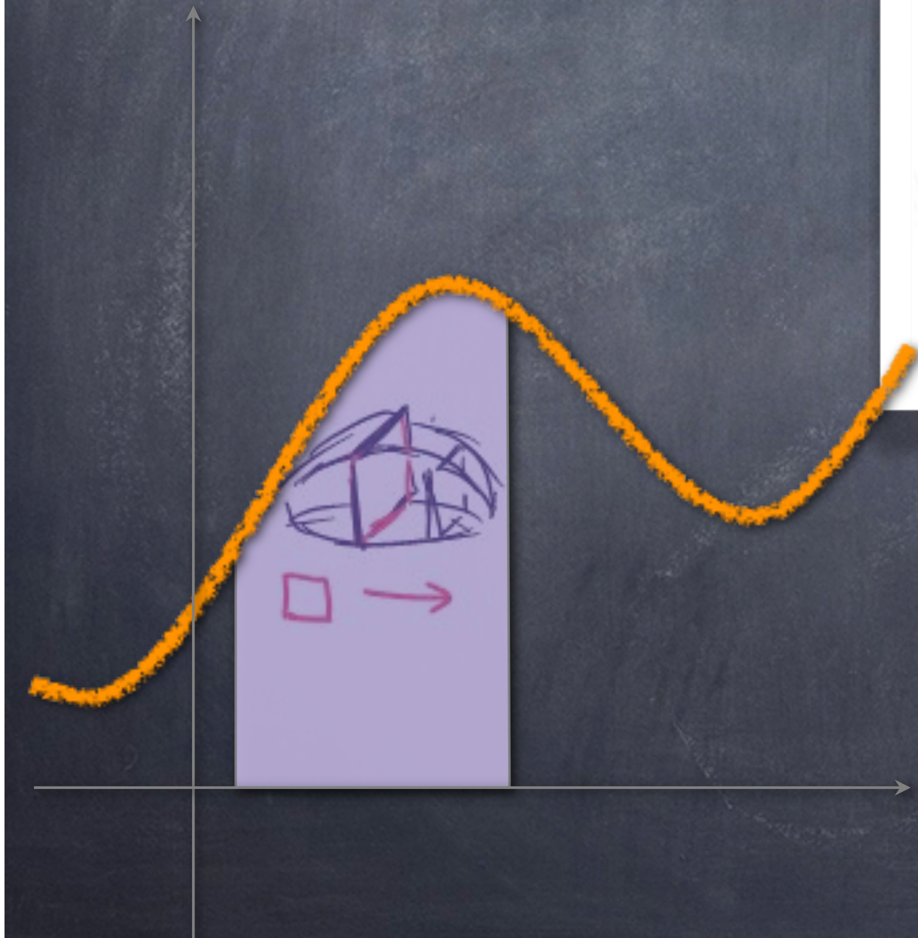
Approximatie van x^3 met stapgrootte h=0.25



Programma vandaag

- Samenvatting: differentieren
- Het getal e
- Kettingregel
- Afgeleide van ln(x)
- Optimaliseren
- Approximeren
- Integreren

Integreren



Waarom? In statistiek wordt oppervlakte gebruikt om kansen te specificeren

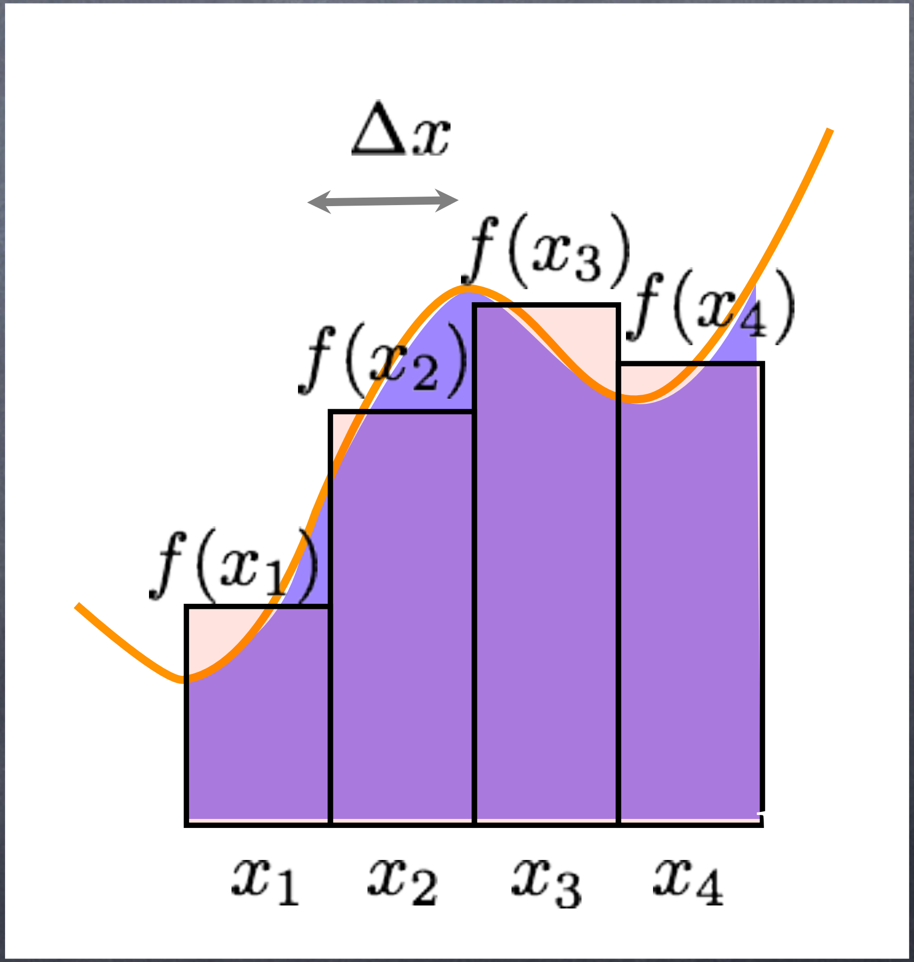
De oppervlakte onder een curve kan exact worden bepaald met behulp van benaderingen

Stel we zoeken de oppervlakte onder de curve op (a, b)

Deel (a, b) in 4 stukken van lengte $\Delta x = (b - a)/4$

Benader met rechthoeken

opp. $\approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x$



De oppervlakte onder een curve kan exact worden bepaald met behulp van benaderingen

Stel we zoeken de oppervlakte onder de curve op (a, b)

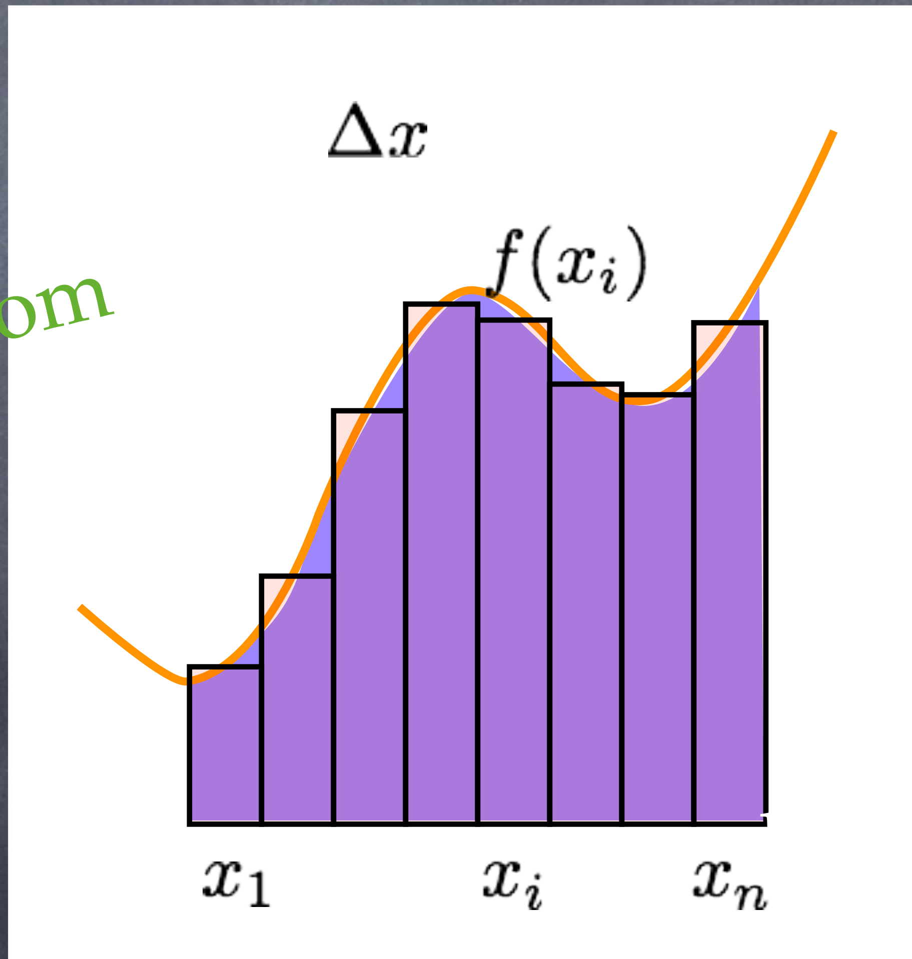
Deel (a, b) in ~~4~~ n stukken van lengte $\Delta x = (b - a)/4$

$$\text{opp.} \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Riemann som

In de limiet $n \to \infty$ is dit exact

$$\text{opp.} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$



De oppervlakte onder een curve kan exact worden bepaald met behulp van benaderingen

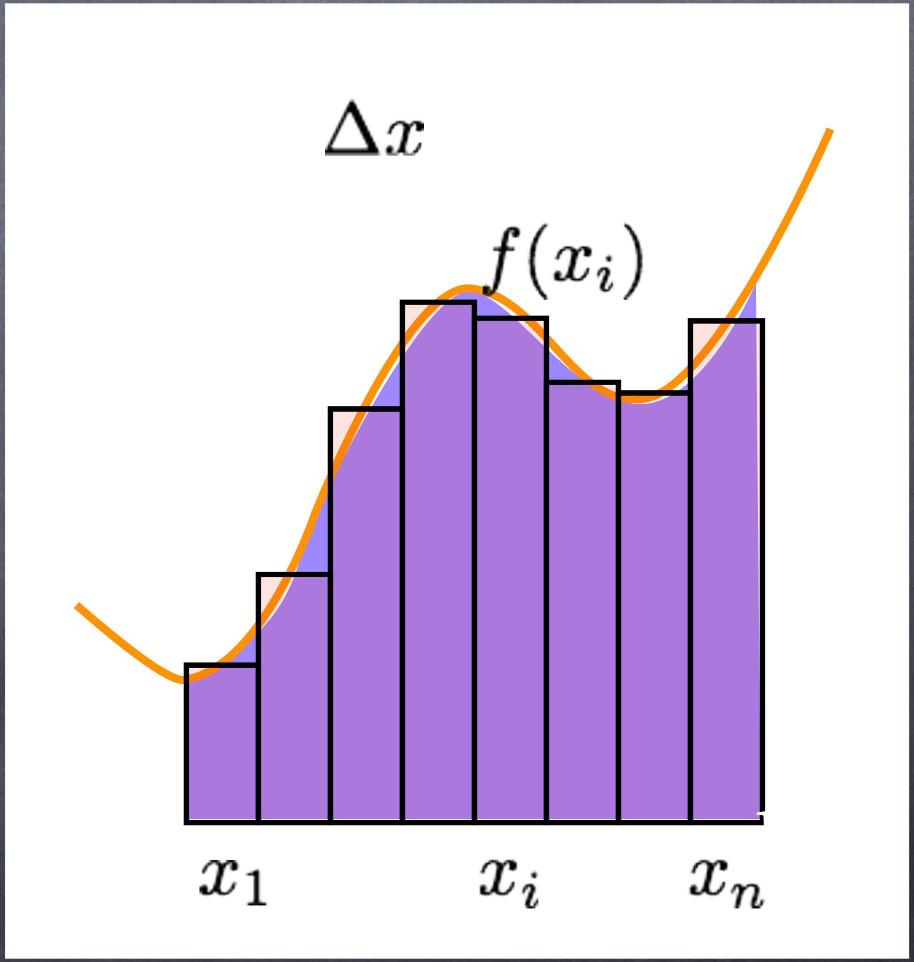
Stel we zoeken de oppervlakte onder de curve op (a, b)

We definieren het symbool

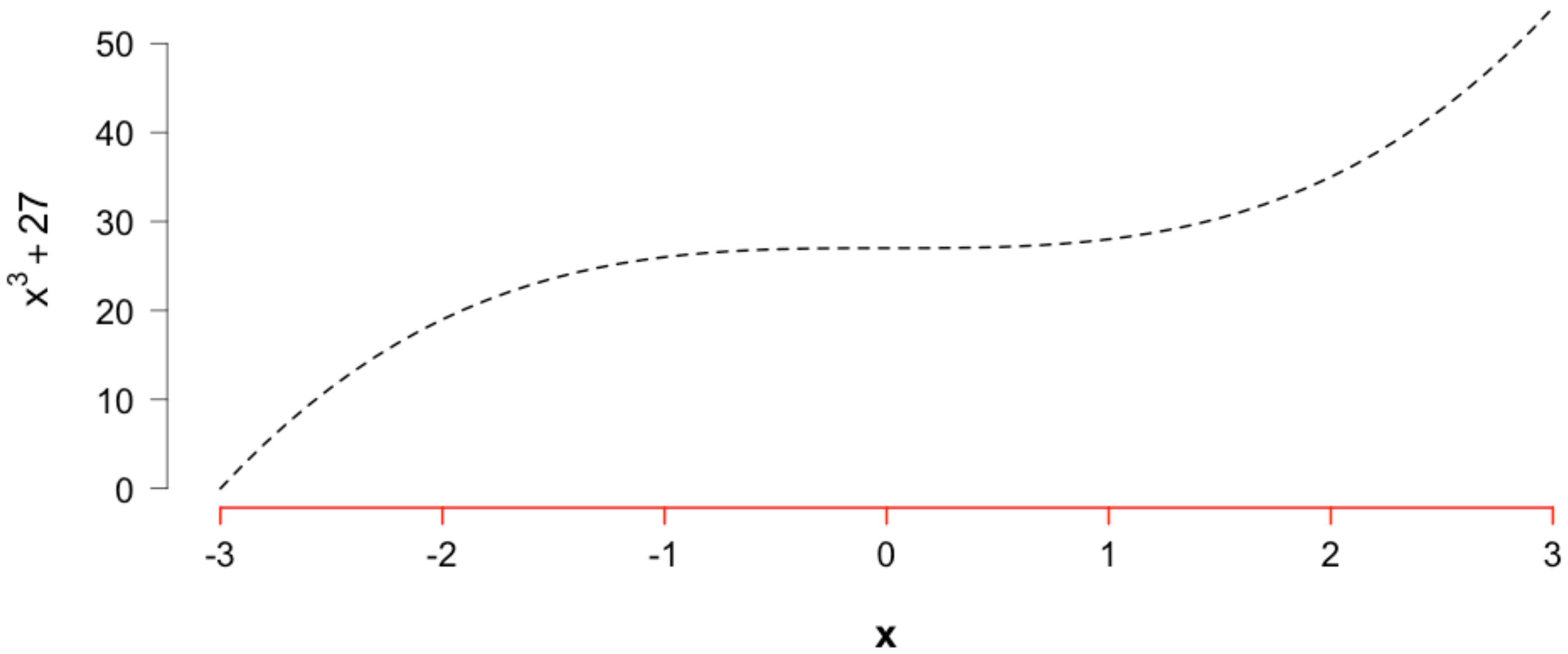
$$\int_a^b f(x)dx$$

als de limiet

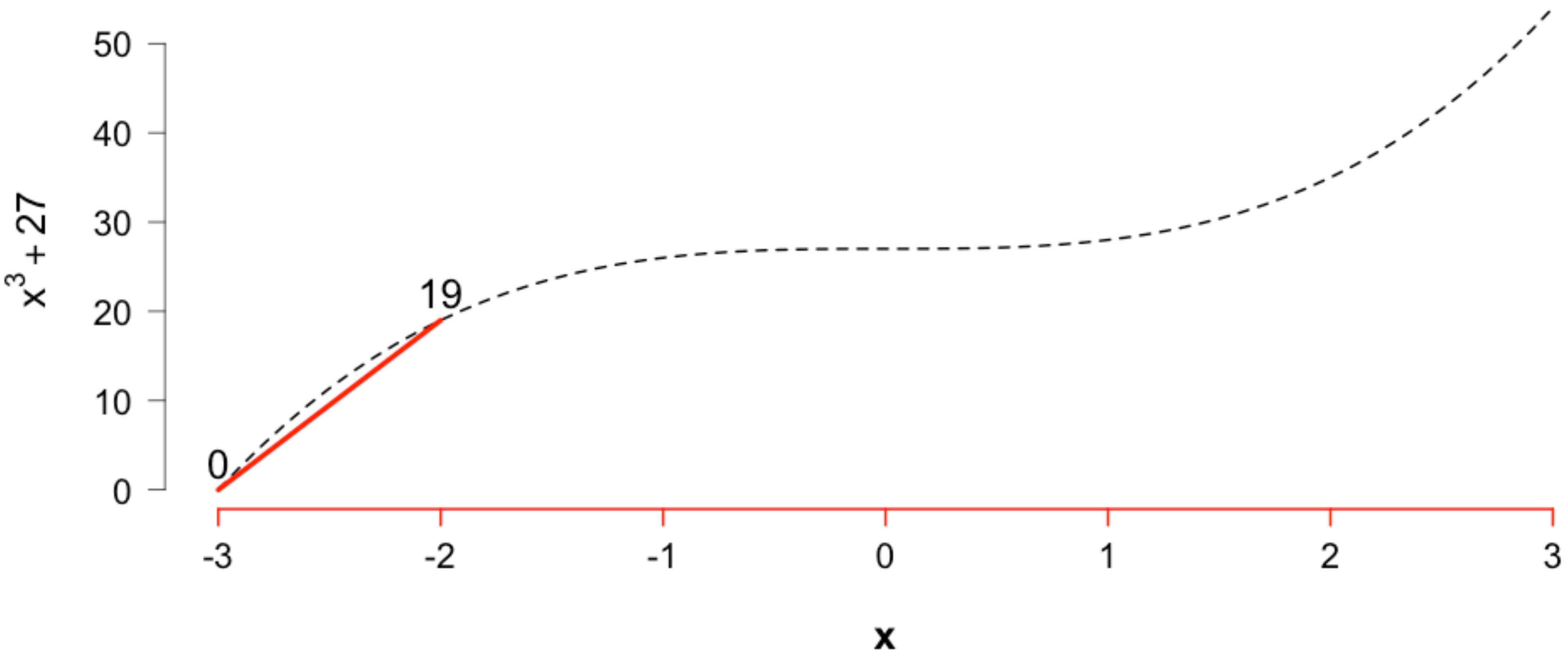
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$



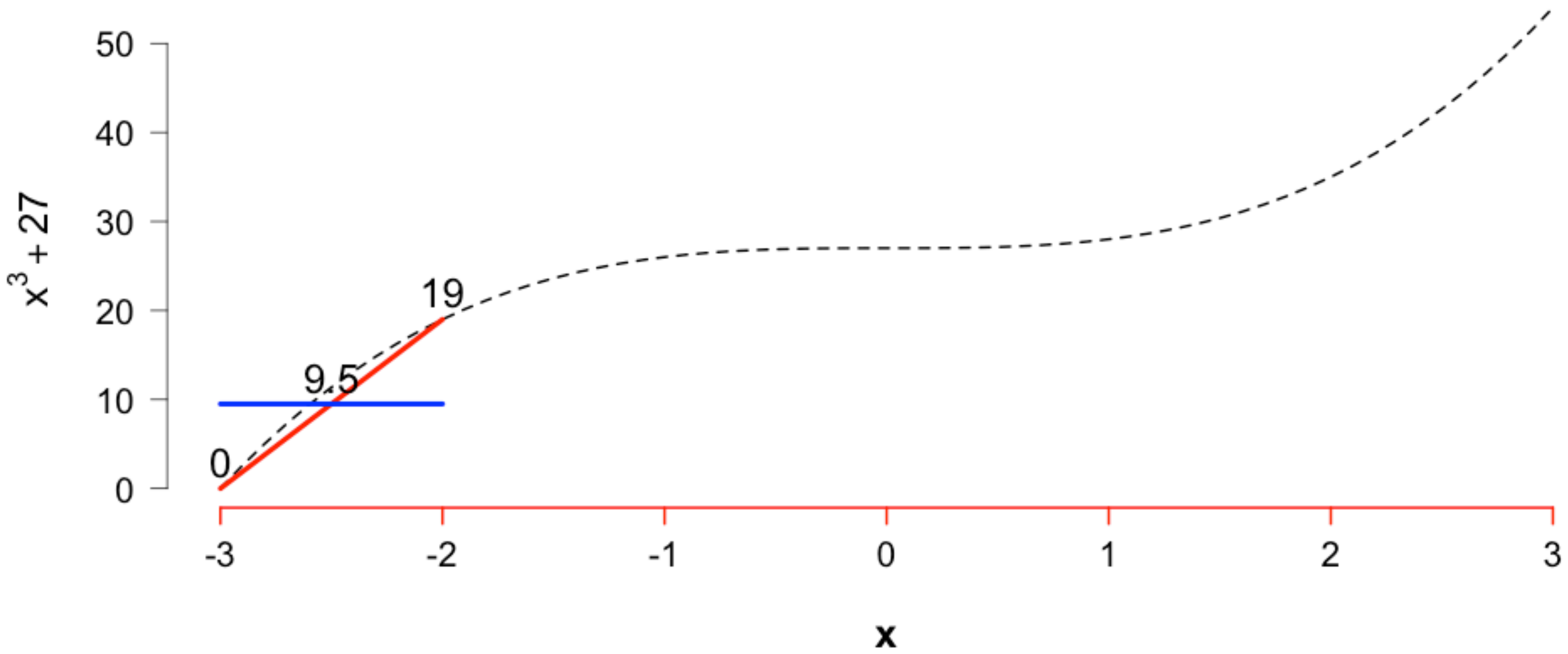
Integraal van x^3+27, h=1



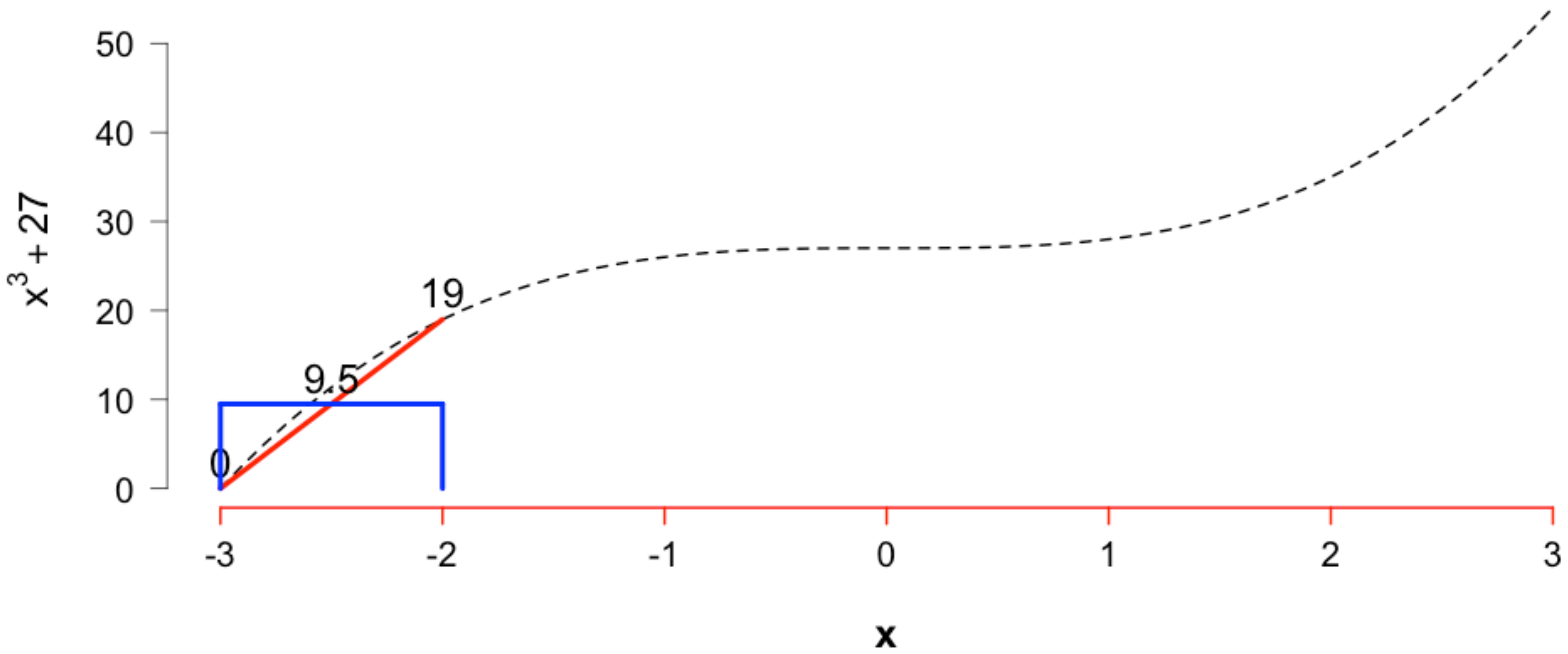
Integraal van x^3+27, h=1



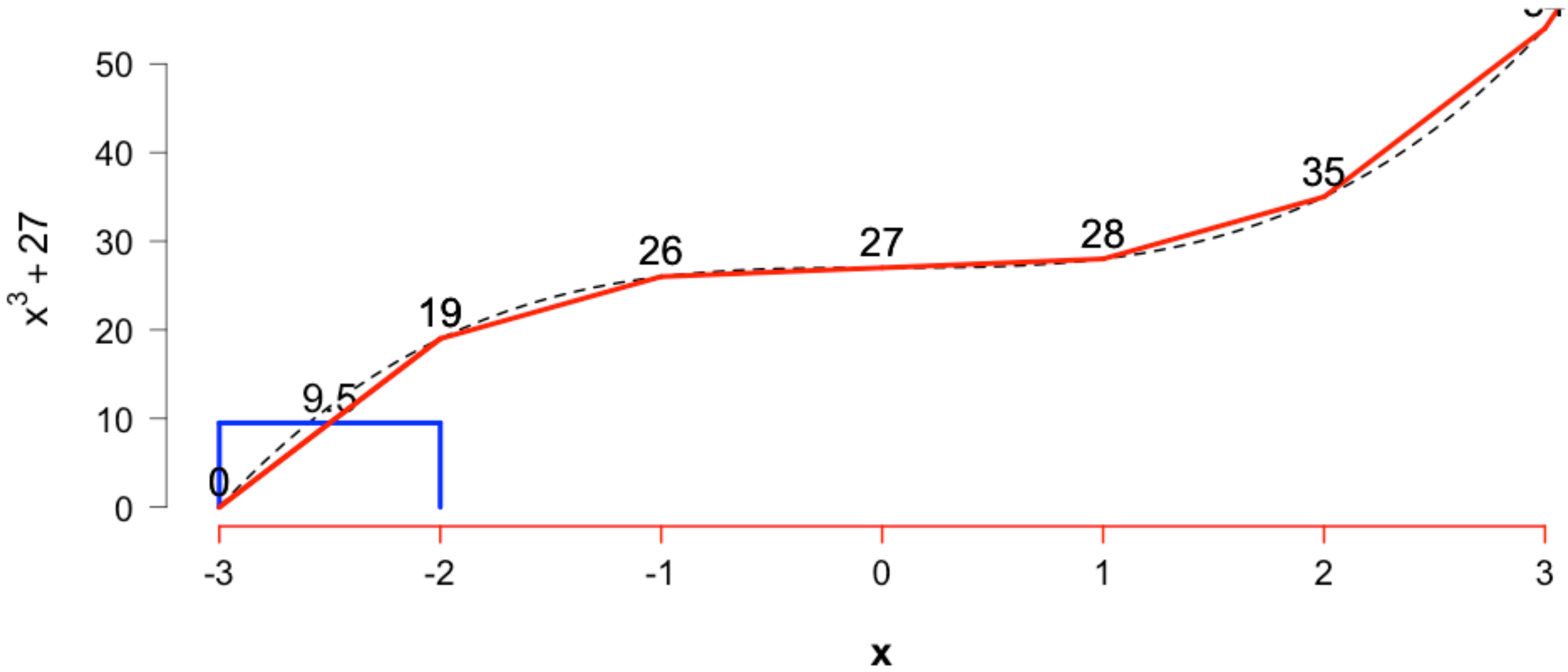
Integraal van x^3+27, h=1



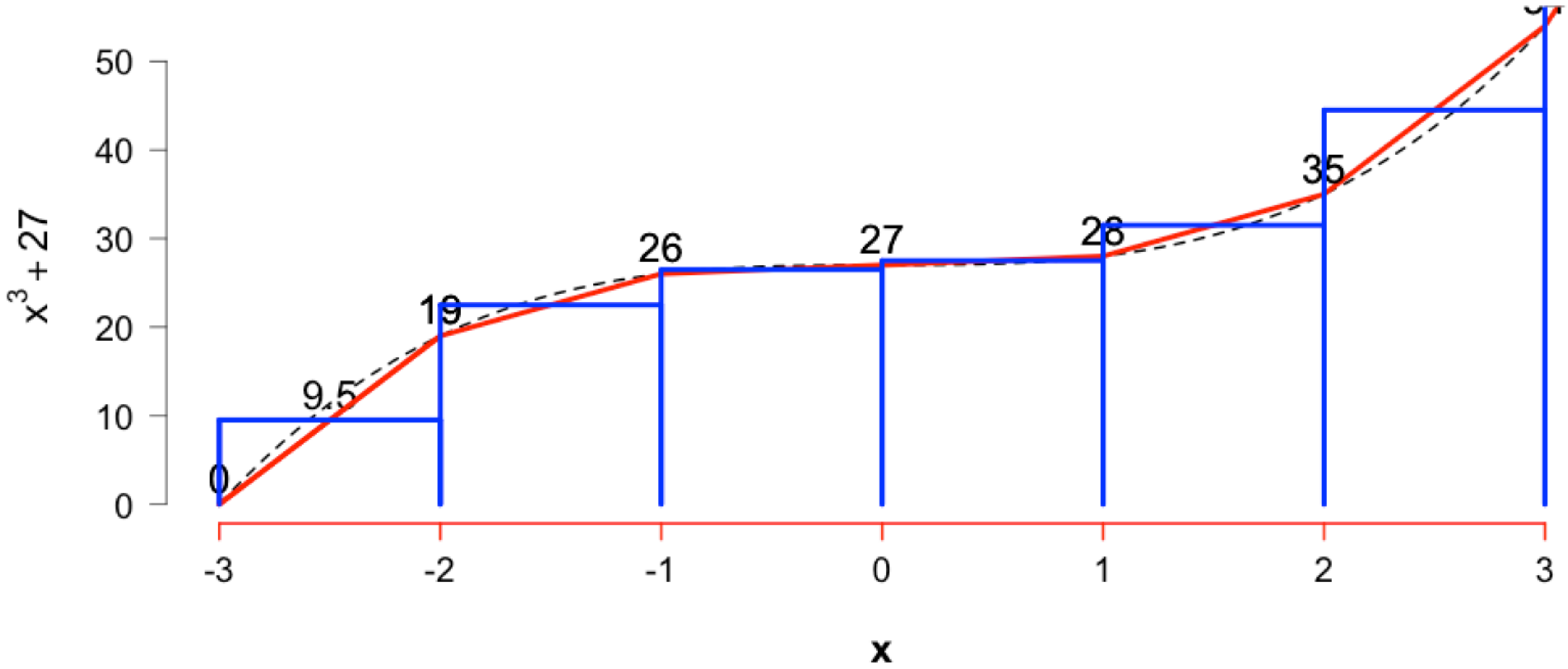
Integraal van x^3+27, h=1



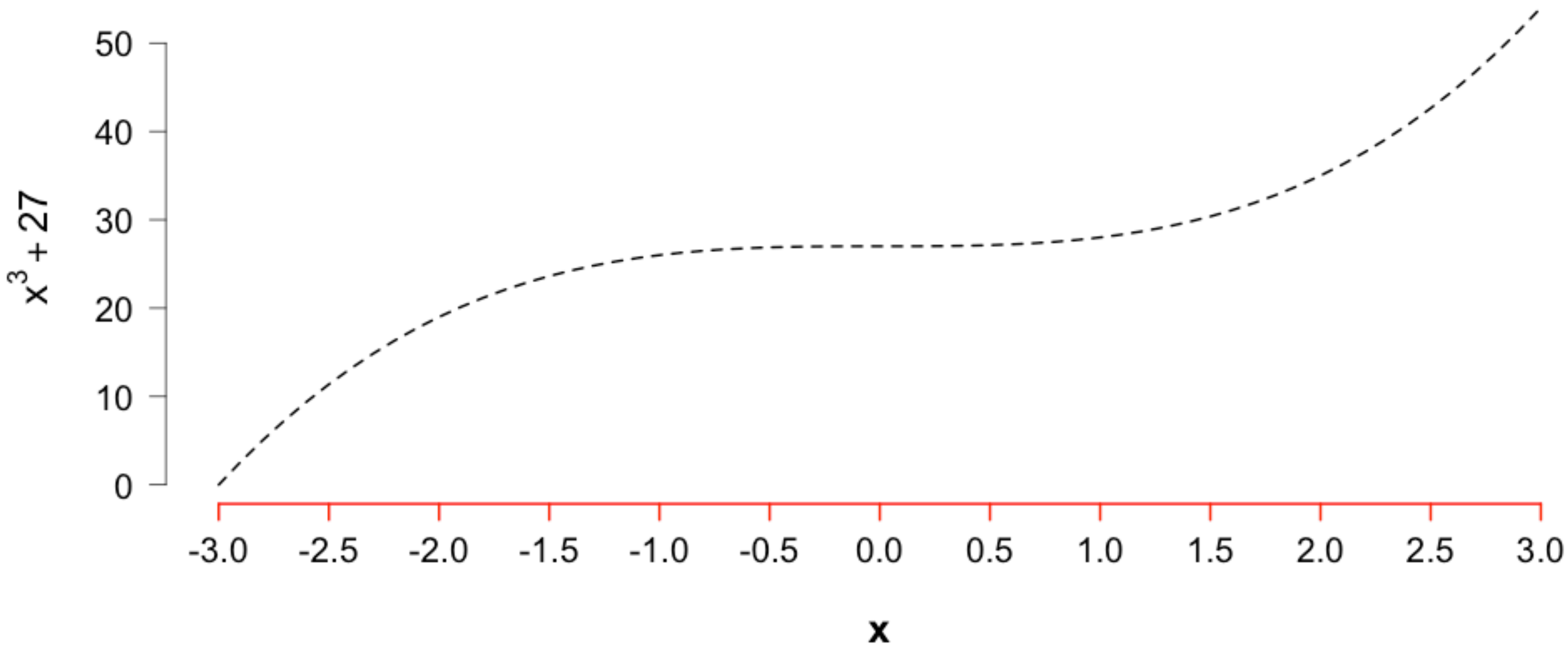
Integraal van x^3+27, h=1



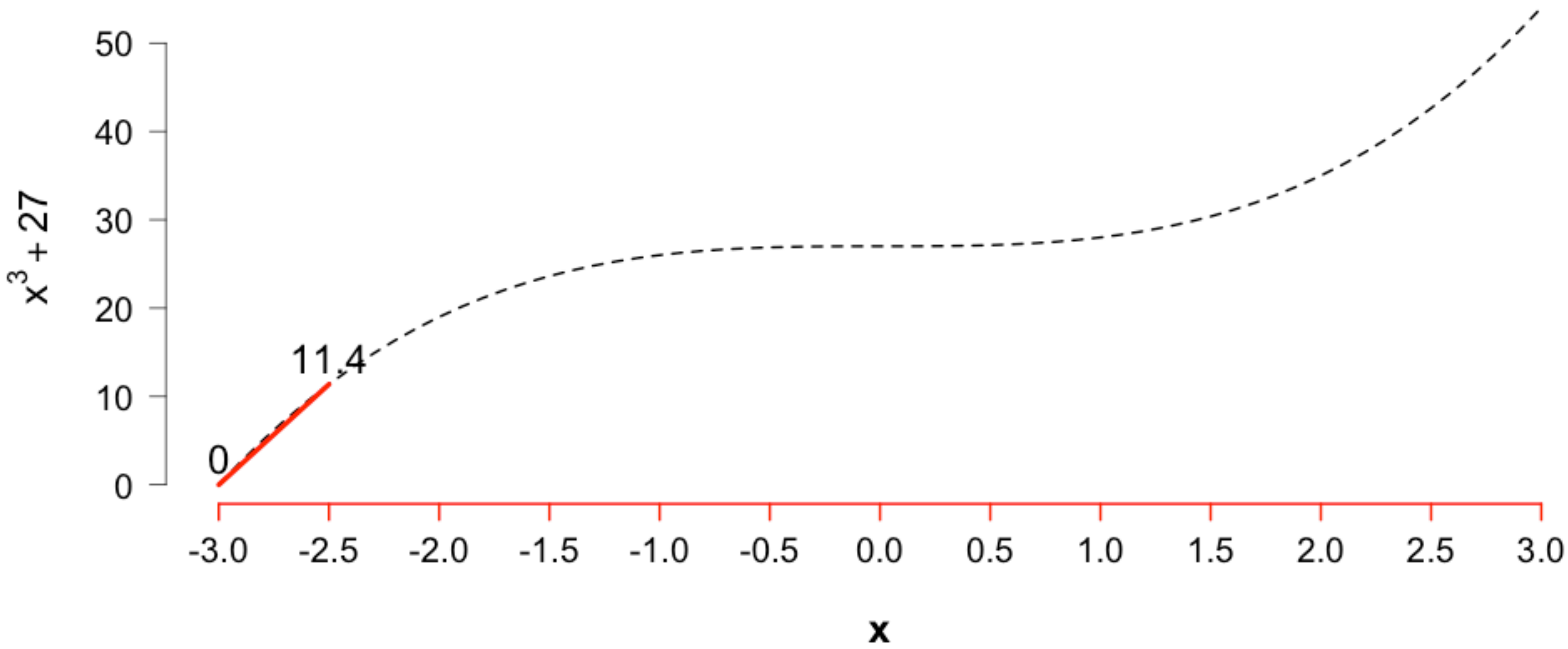
Integraal van x^3+27, h=1



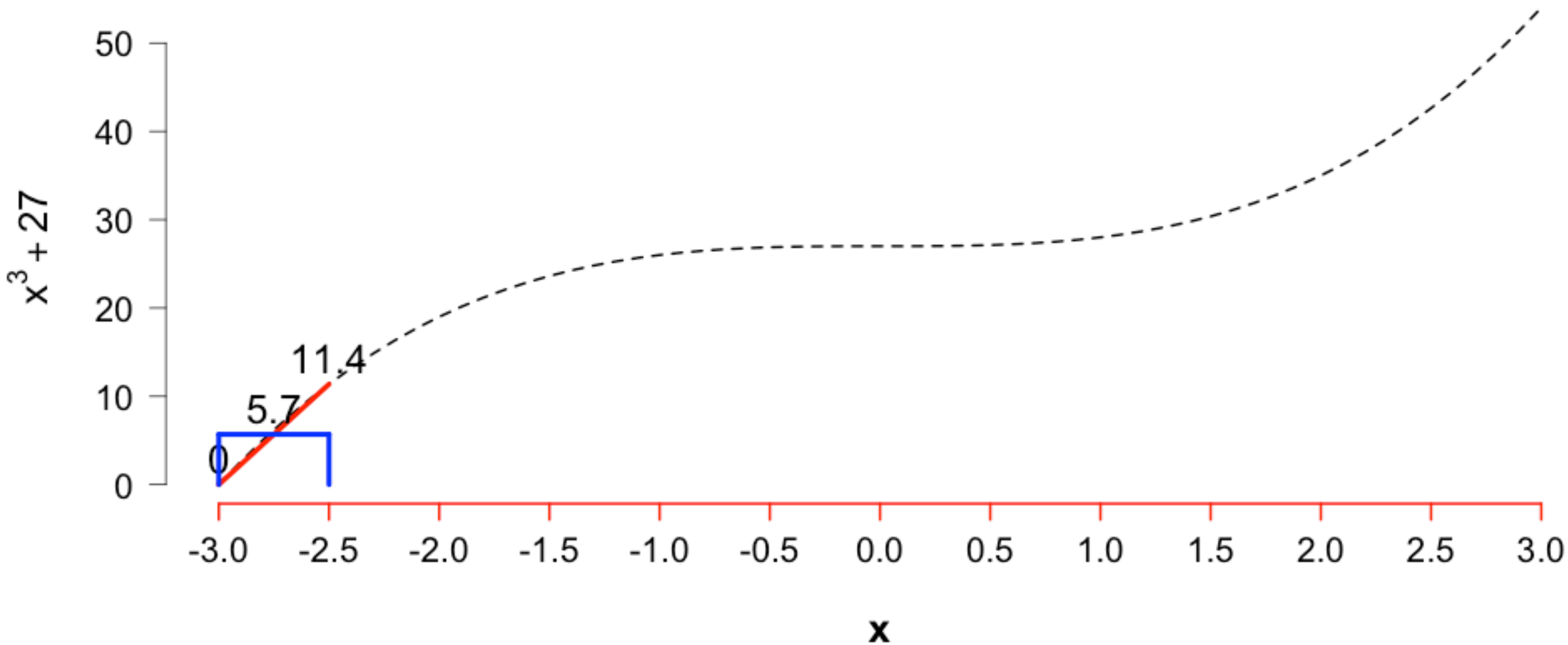
Integraal van x^3+27, h=0.5



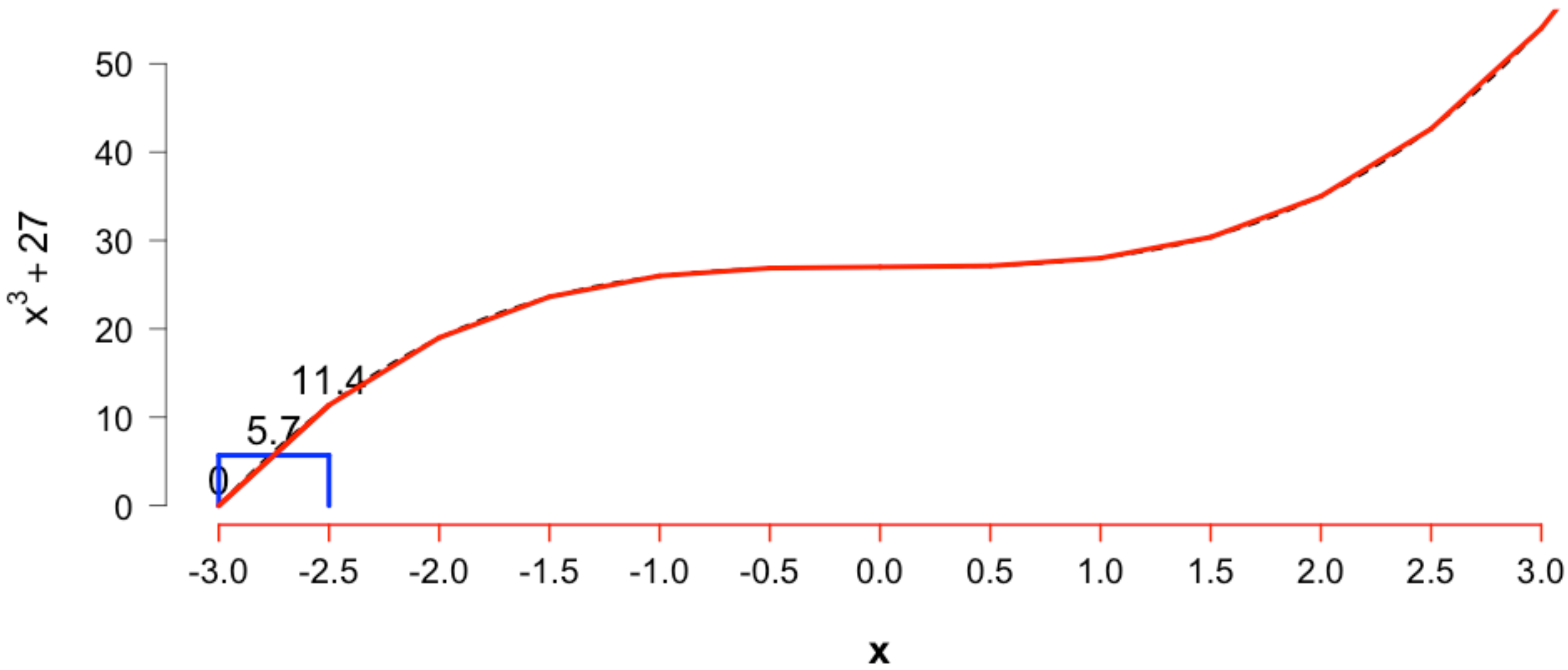
Integraal van x^3+27, h=0.5



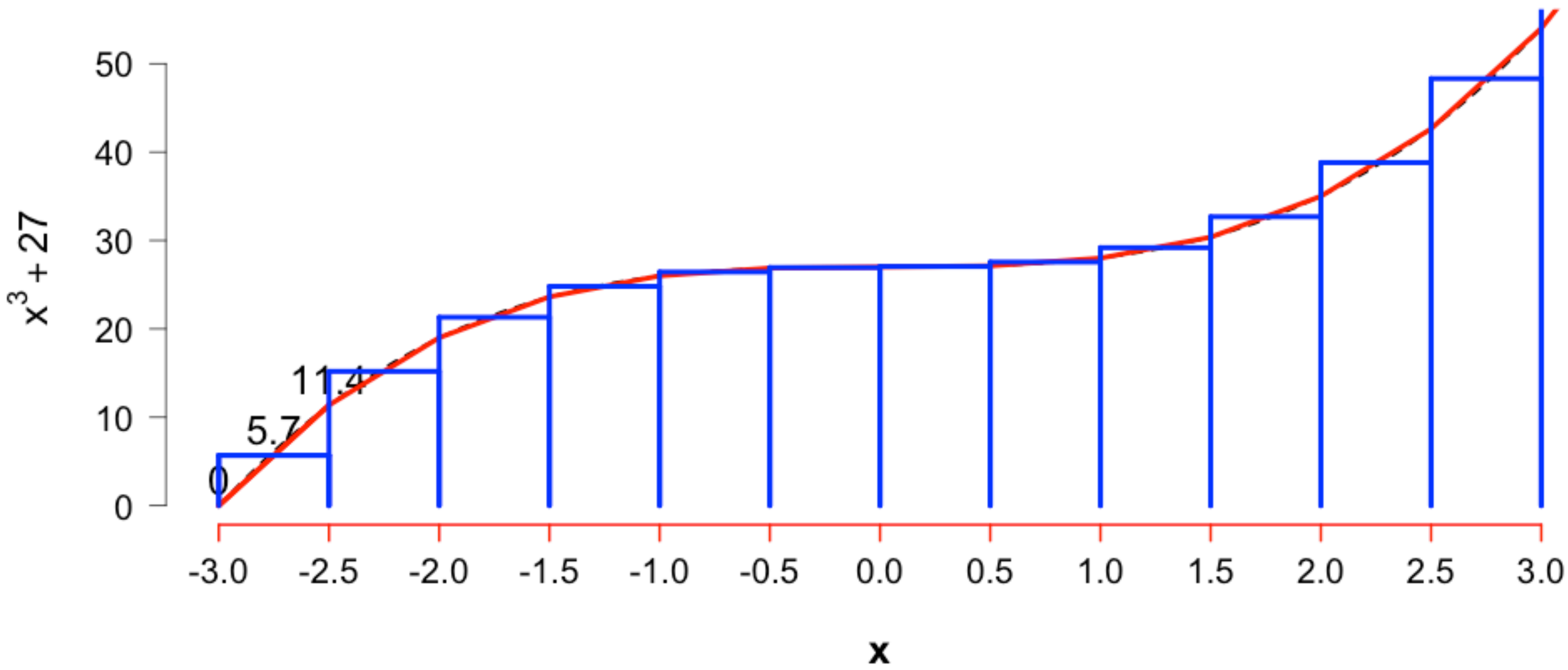
Integraal van x^3+27, h=0.5



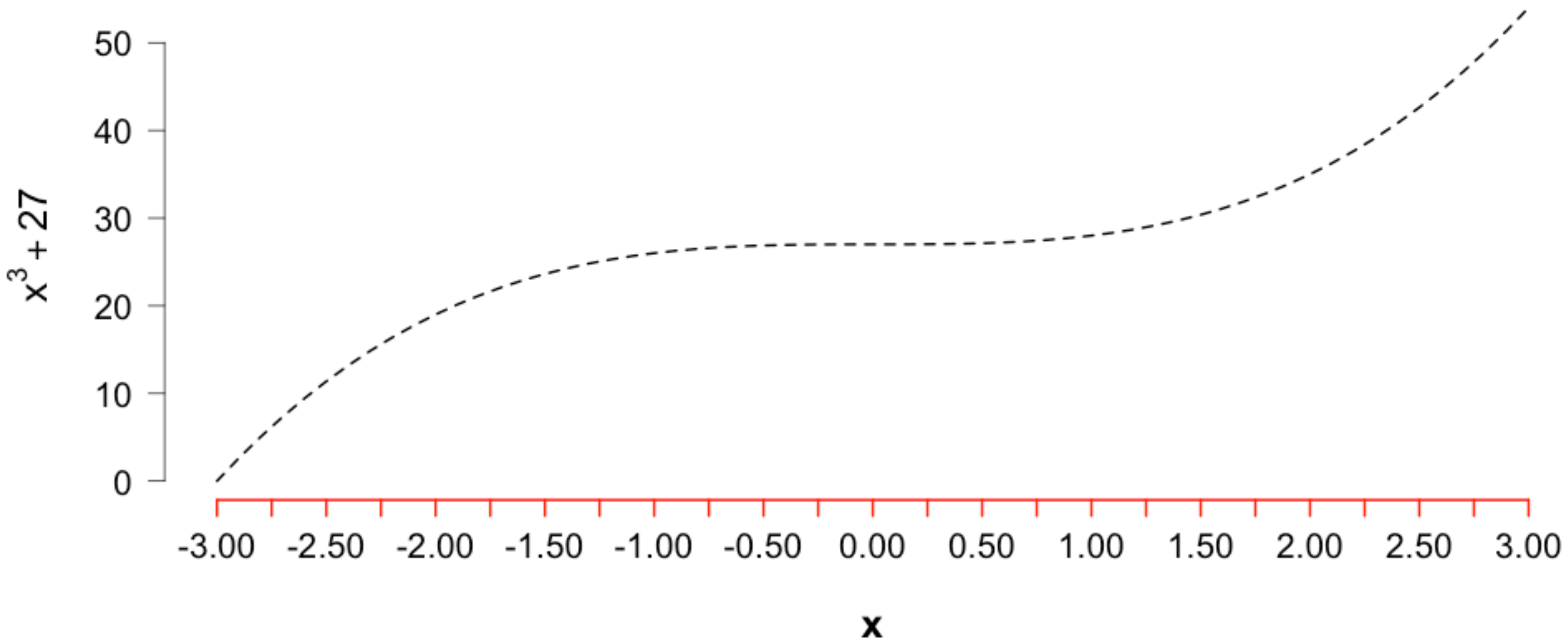
Integraal van x^3+27, h=0.5



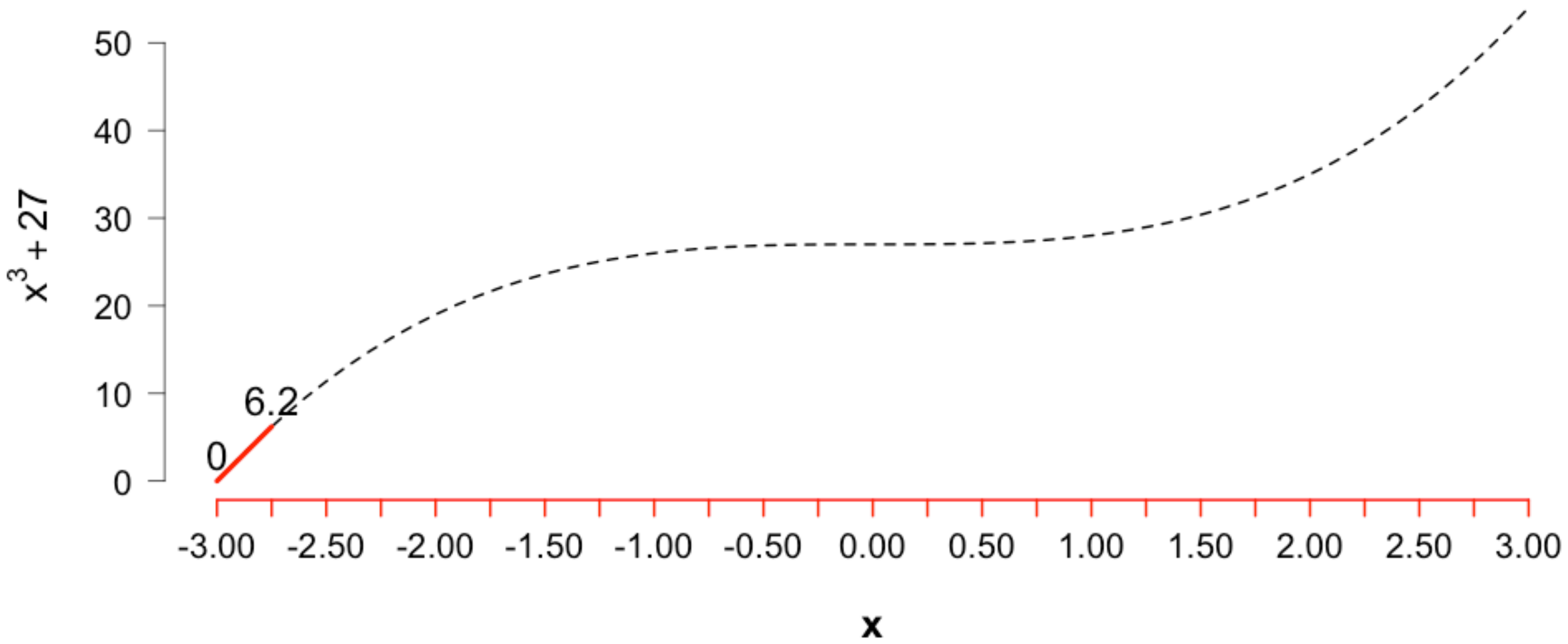
Integraal van x^3+27, h=0.5



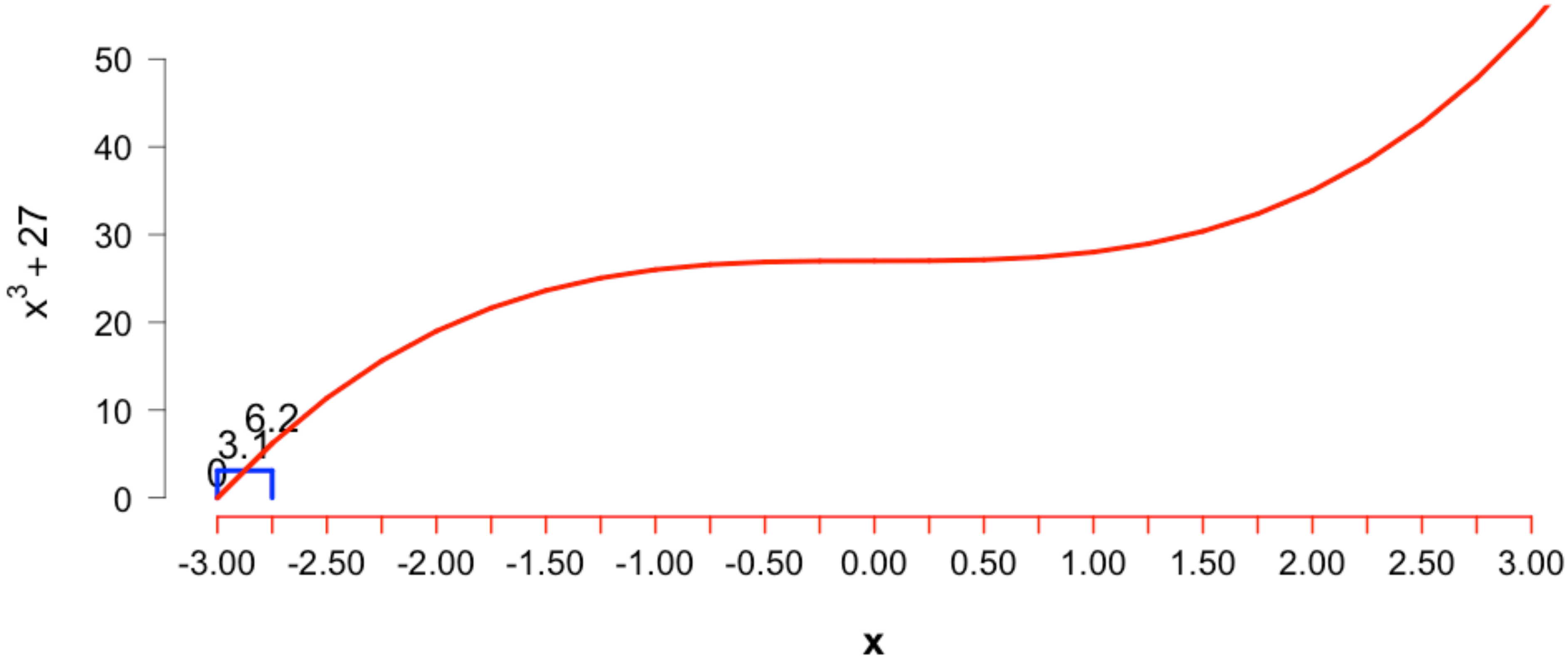
Integraal van x^3+27, h=0.25



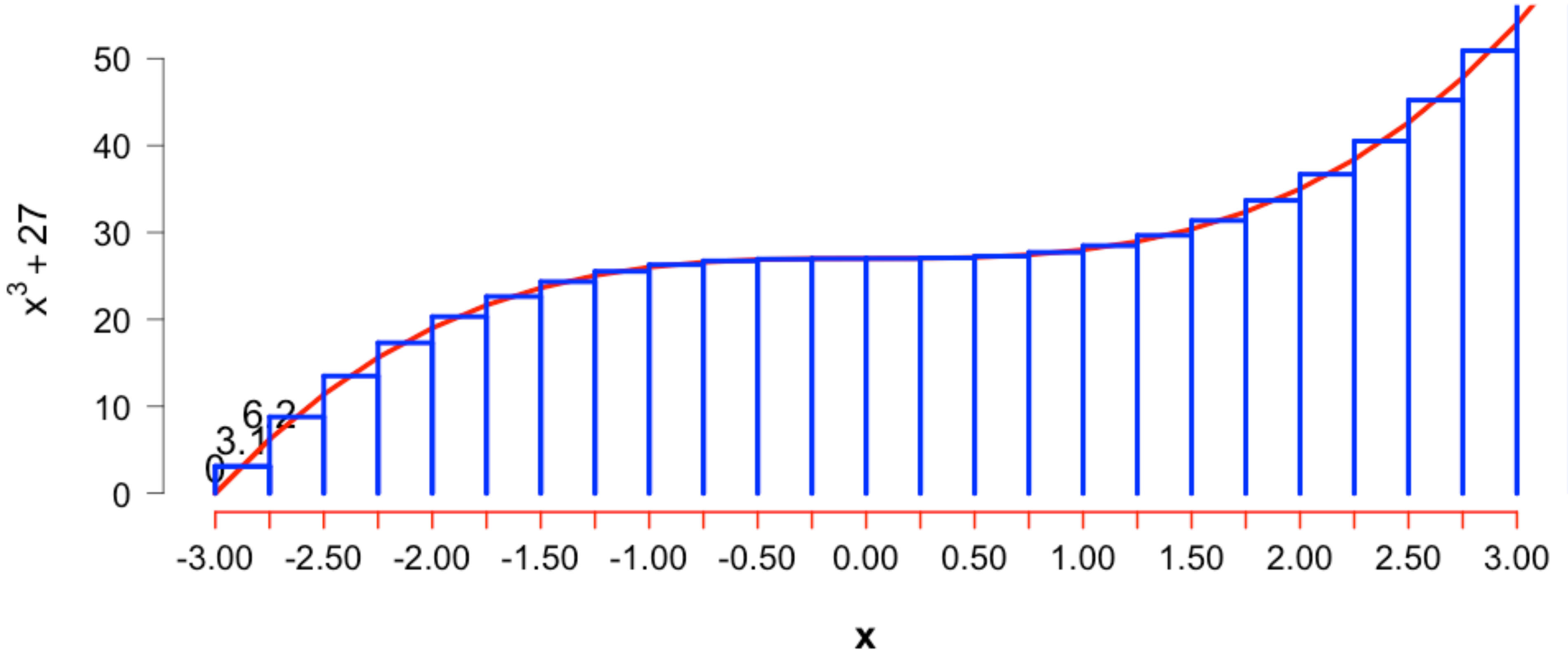
Integraal van x^3+27, h=0.25



Integraal van x^3+27, h=0.25



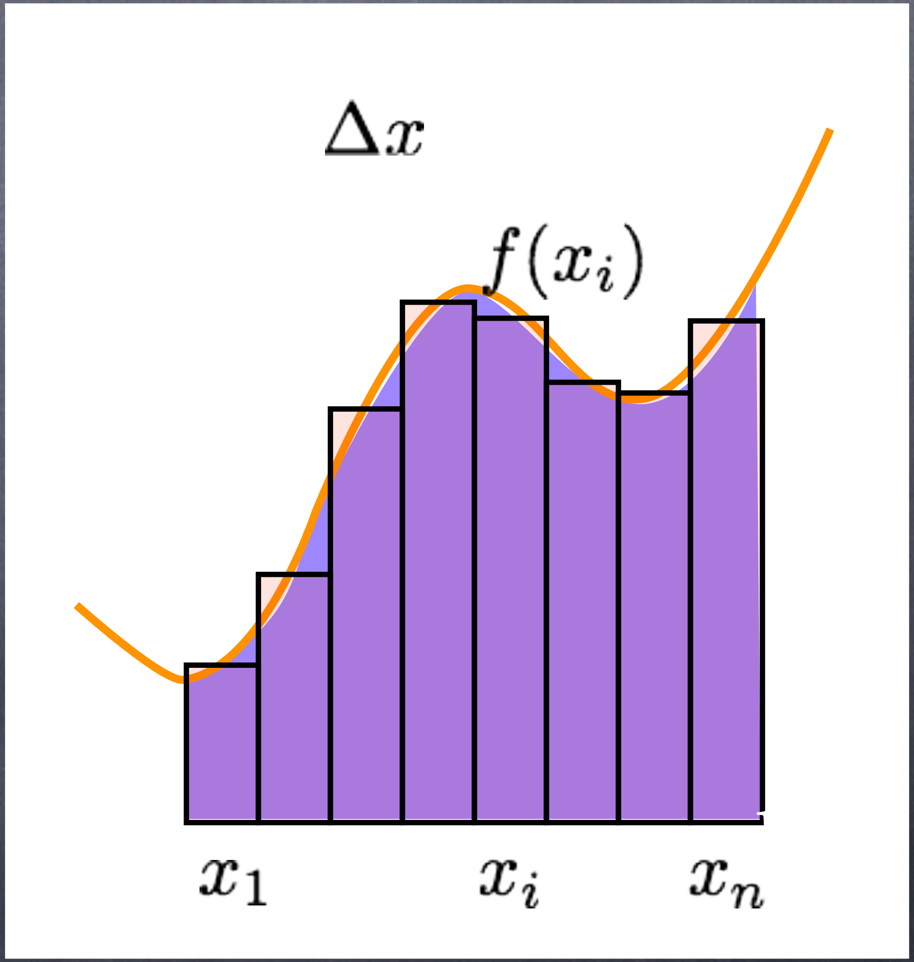
Integraal van x^3+27, h=0.25



De oppervlakte onder een curve kan exact worden bepaald met behulp van benaderingen

Stel we zoeken de oppervlakte onder de curve op (a, b)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$



Deze limiet heet de bepaalde integraal van f(x) op (a, b)

Hoe bereken je die limiet?

Hoofdstelling van Calculus

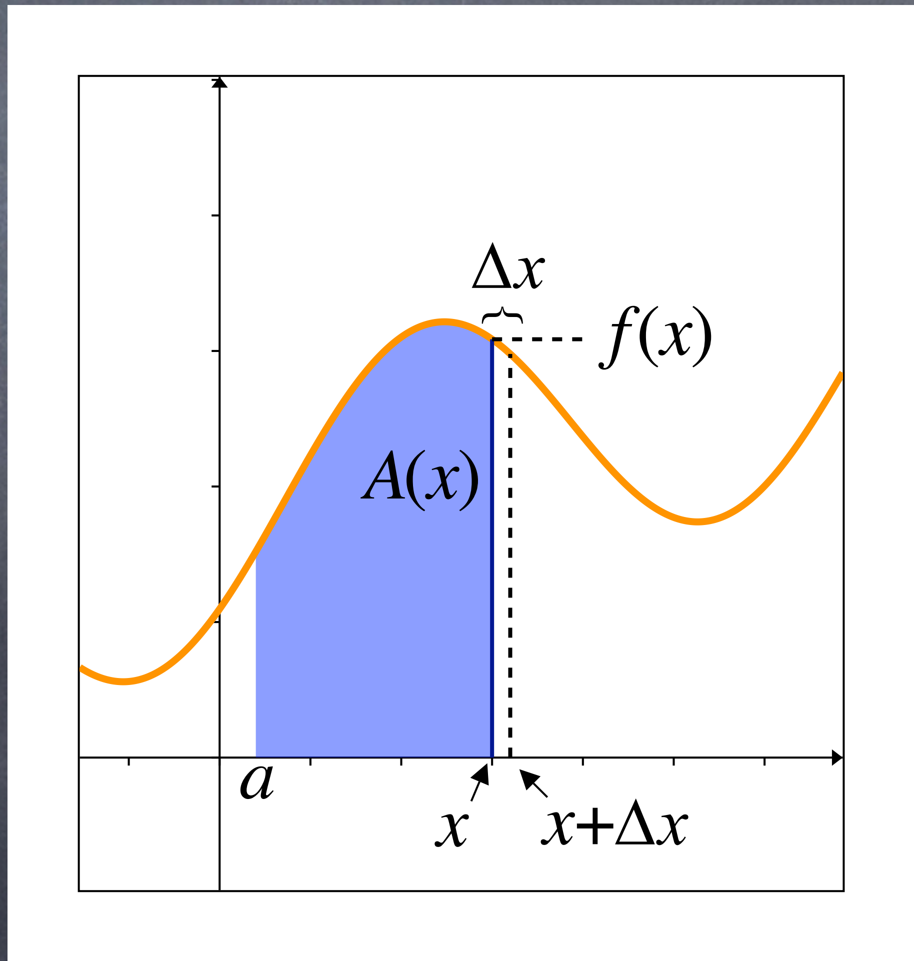
Hoofdstelling van de calculus

Als F een functie is met een afgeleid f, dwz

$$F'(x)=f(x)$$

Dan geldt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



“Inversions”

Operators	Inverse operators
Som: $h(x)=f(x) + g(x)$	Verschil: $h(x) - g(x) = f(x)$
Prod: $h(x)=f(x) \cdot g(x)$	Quotient: $\dfrac{h(x)}{g(x)} = f(x)$
Macht: $h(x)=[f(x)]^q$	Wortel: $[h(x)]^{1/q} = f(x)$
Exp: $h(x)=a^{f(x)}$	Log: $\log_a[h(x)]=f(x)$
Afge: $h(x)=\frac{d}{dx}F(x)$	Integr: $\int h(x)\,dx = F(x) + C$

De simpele differentatie regels

- $[c]' = 0$
- $[x^n]' = nx^{n-1}$
- $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$
- $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

De simpele integratie regels

- $\int_a^b c\, dx = (b\text{-}a)\, c$
- $\int_a^b x^n\, dx = (n+1)^{-1}(b^{n+1} - a^{n+1})$
- $\int_a^b c \cdot f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx =$

$$\int_a^b f'(x) dx \pm \int_a^b g'(x)\, dx$$

De oppervlakte onder een curve kan exact worden bepaald met behulp van benaderingen

Stel we zoeken de oppervlakte onder de curve op (a, b)

dx is infinitesimale Δx

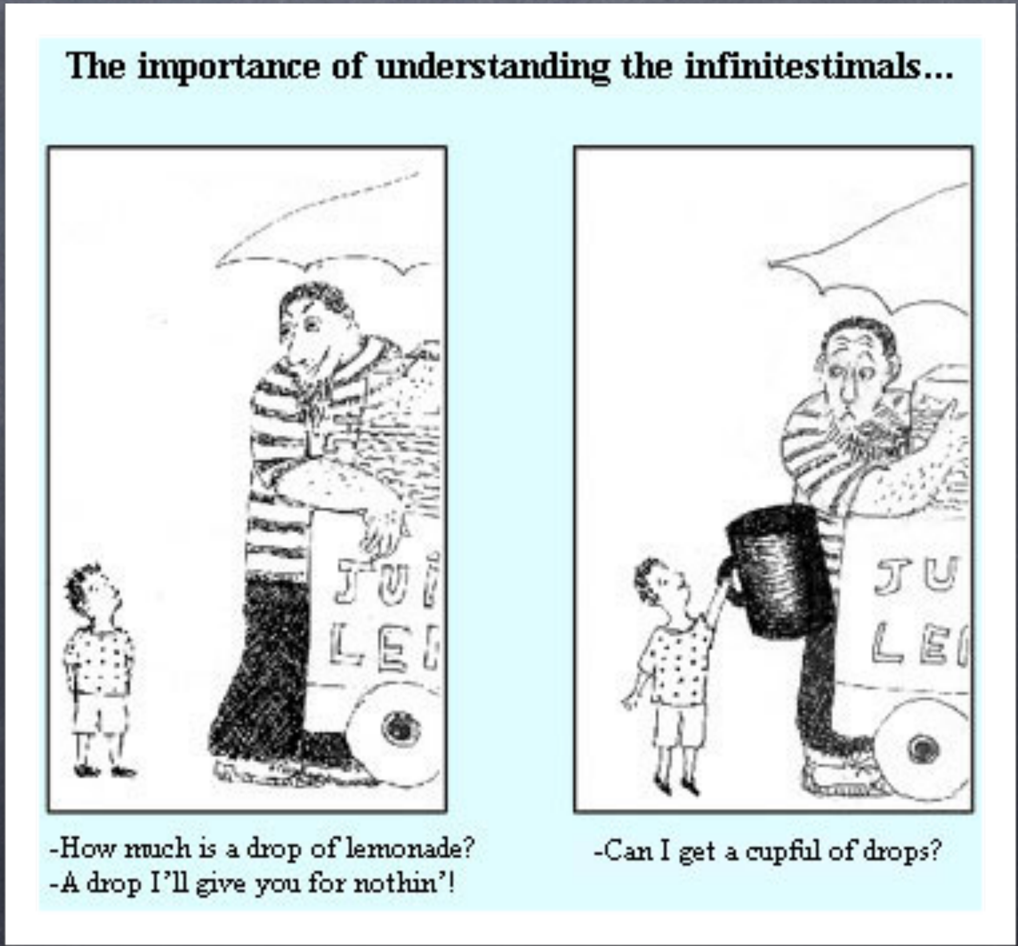
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

kan worden berekend mbv

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

waar $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$

"primitieve"



De Hoofstelling staat ons toe de oppervlakte te berekenen met behulp van een primitive

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad \text{waar} \qquad \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

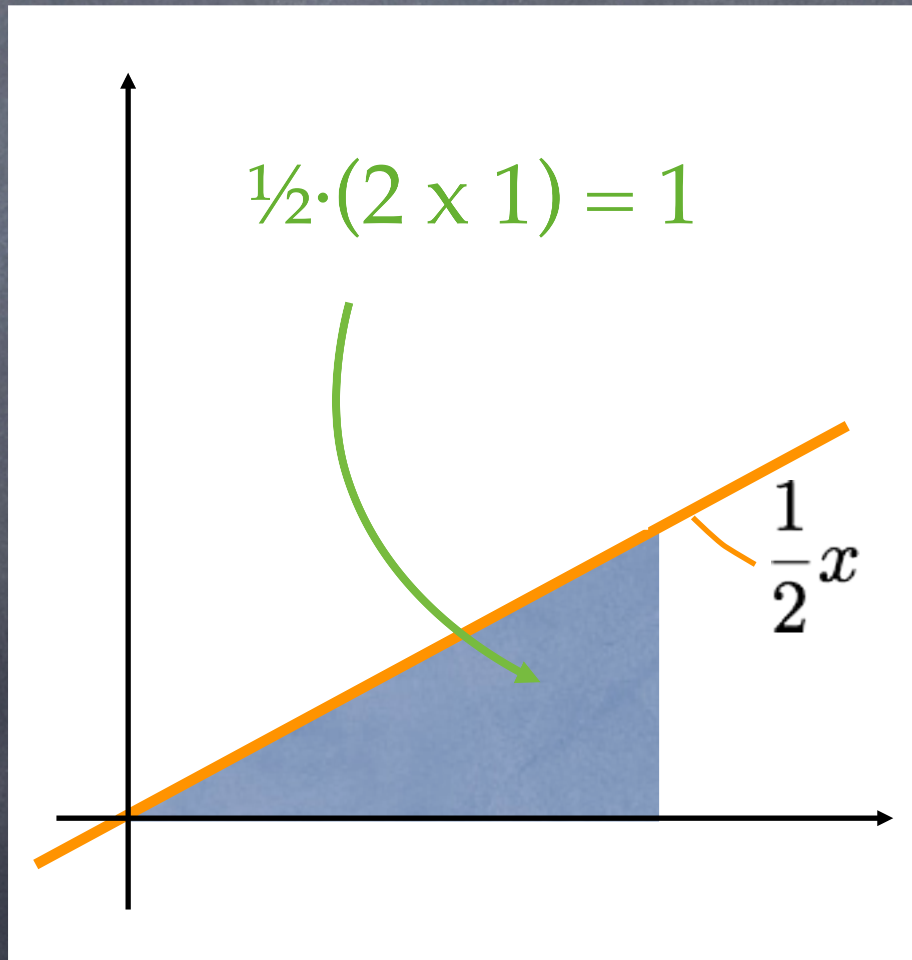
Voorb.:

Bereken $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{2}x\,dx$

Kies $F(x) = \frac{1}{4}x^2$

$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot x = f(x)$

Dus $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{4}\cdot 2^2 - \frac{1}{4}\cdot 0^2 = 1$



Binomiaal verdeling

We gooien munt 10 keer op. Y geeft het aantal keren dat de munt kop omhoog valt (succes). De kans dat een enkele munt op kop valt gebeurt met kans p tussen $0<p<1$

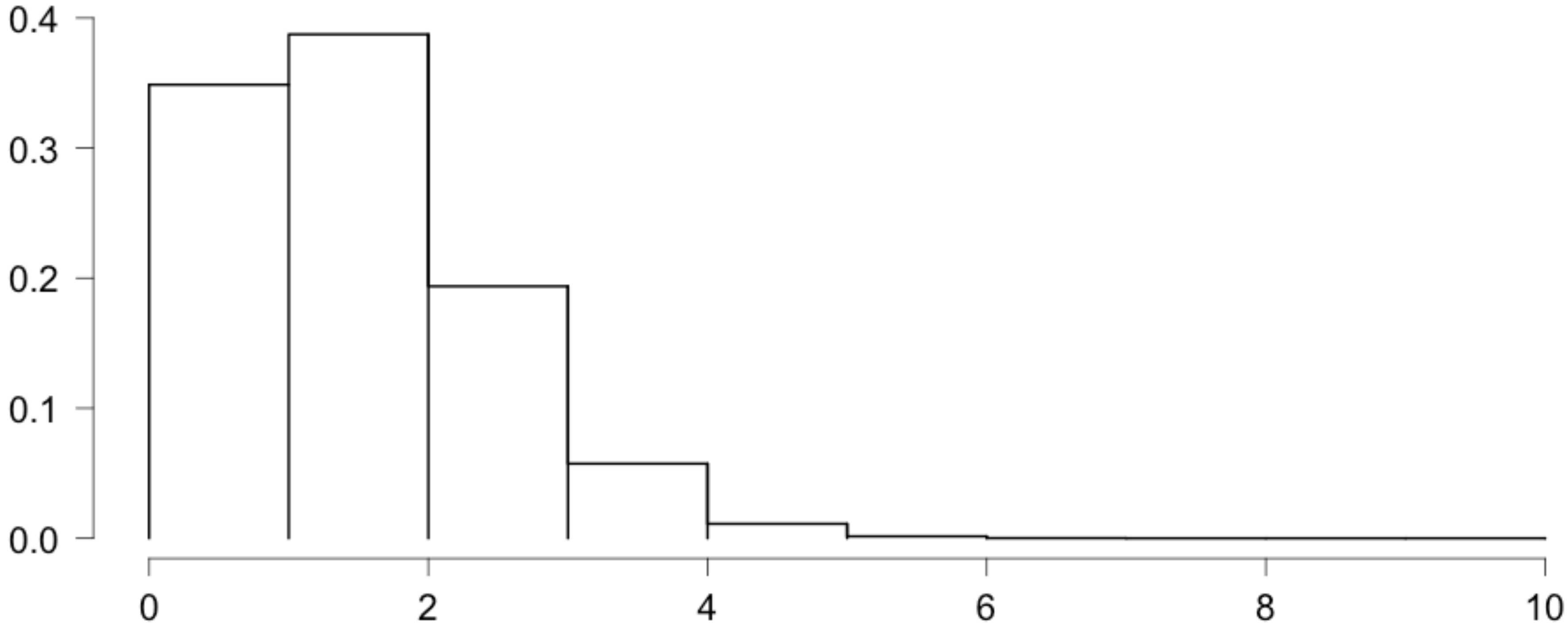
We schrijven

Bij succes schrijven: $P(X=1)= p$

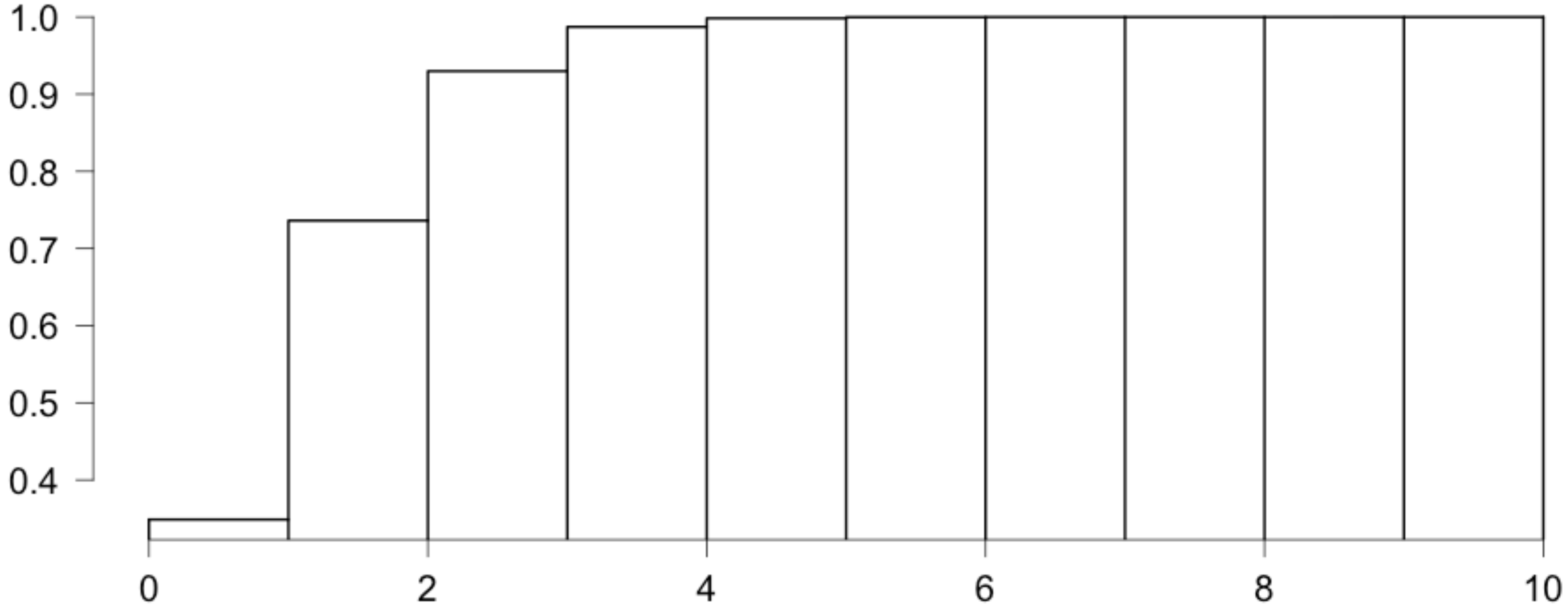
Bij geen succes : $P(X=0)= p-1$

Wat zijn de mogelijke uitkomsten van Y?

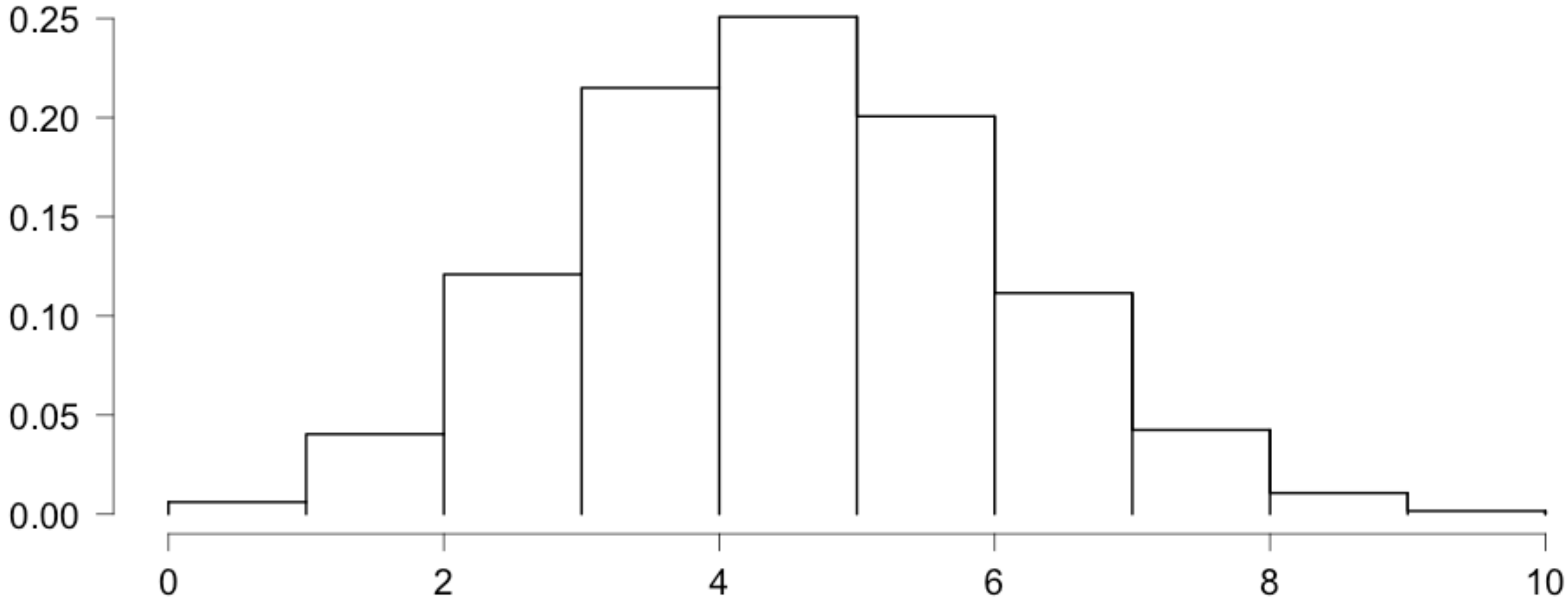
Probability (mass) density function van Bin(p=0.1, n=10)



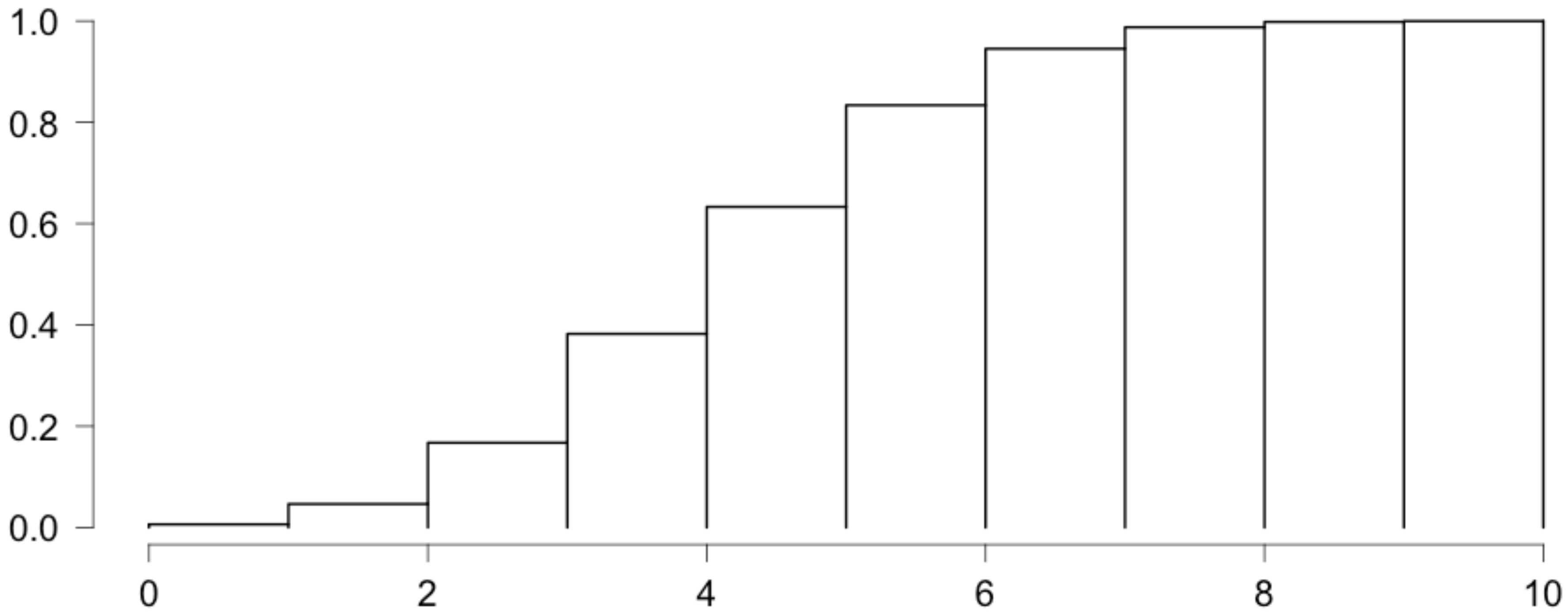
Cumulative distribution function van Bin(p=0.1, n=10)



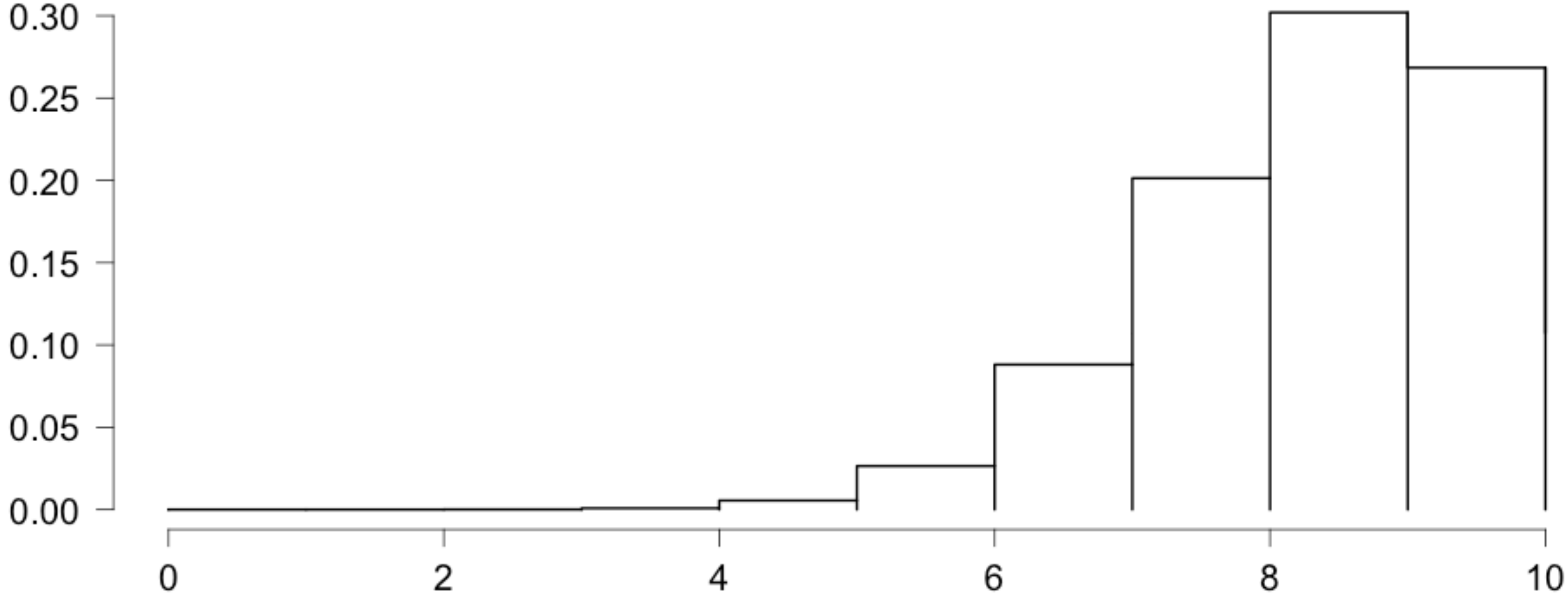
Probability (mass) density function van Bin(p=0.4, n=10)



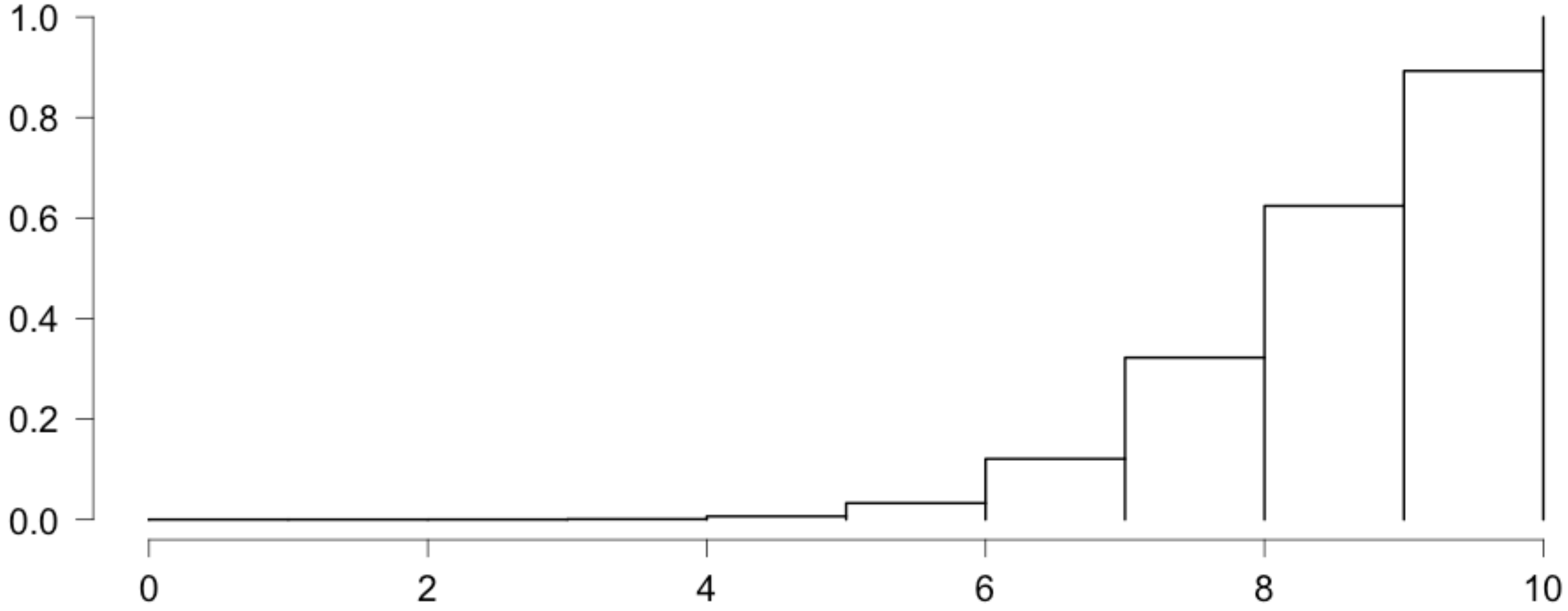
Cumulative distribution function van Bin(p=0.4, n=10)



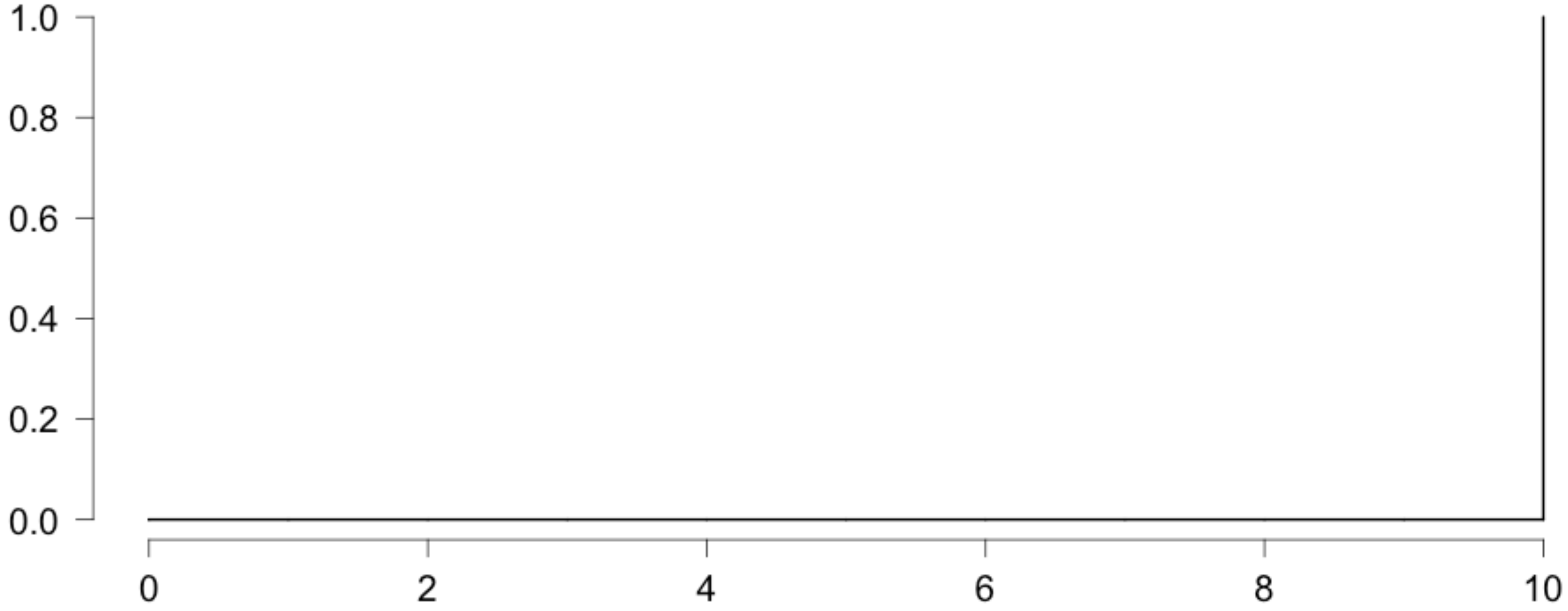
Probability (mass) density function van Bin(p=0.8, n=10)



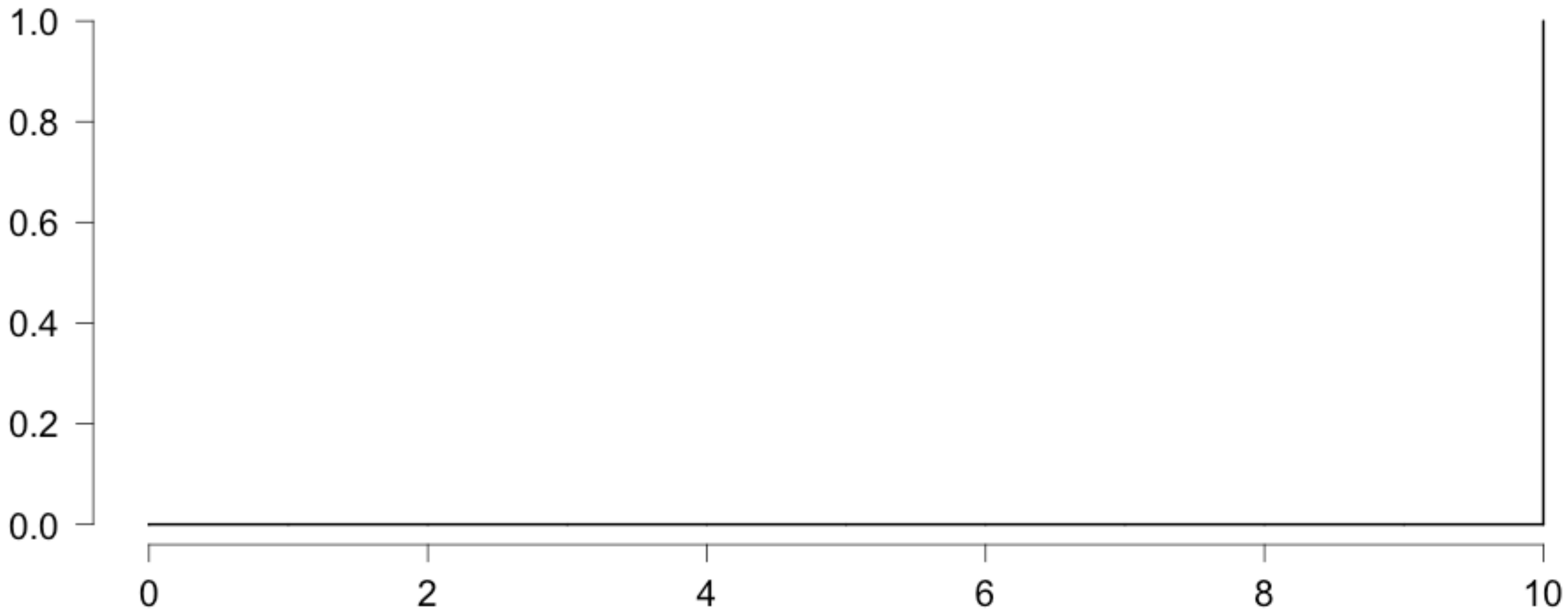
Cumulative distribution function van Bin(p=0.8, n=10)



Probability (mass) density function van Bin(p=1, n=10)



Cumulative distribution function van Bin(p=1, n=10)



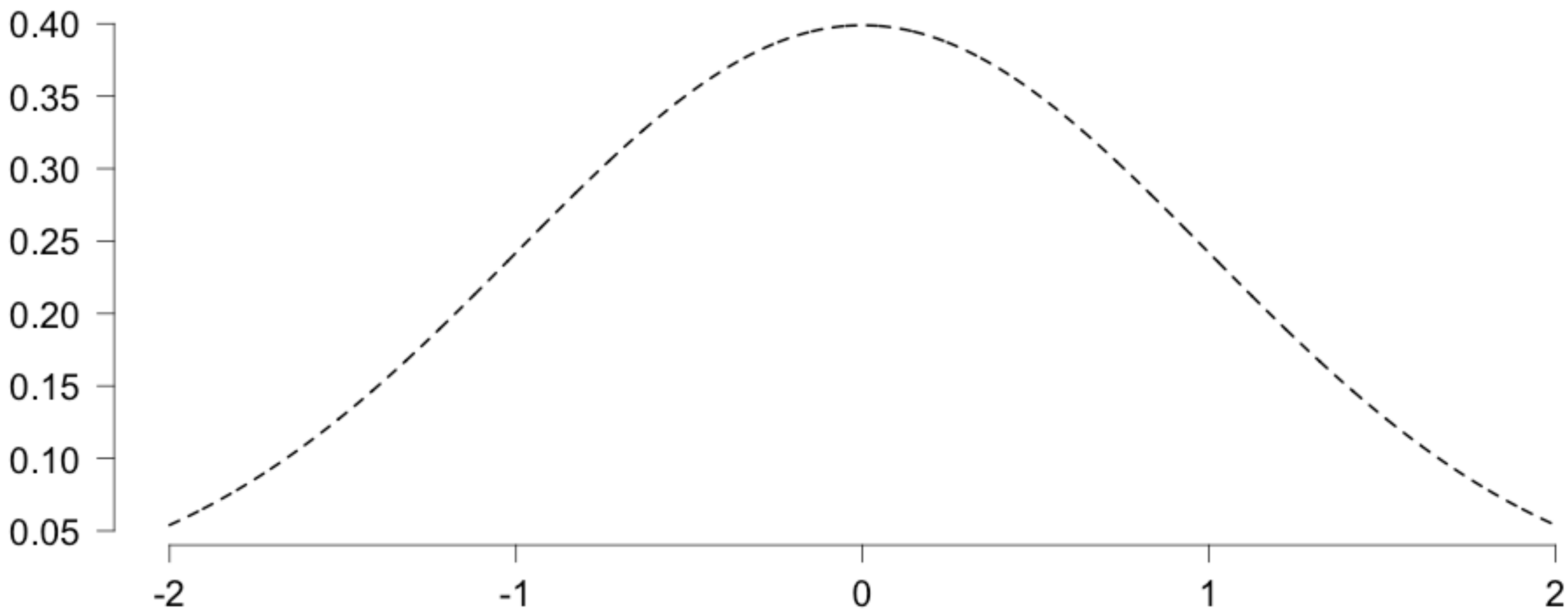
Probability density function van N(mu=0, sigma=1)

$f(x) = (2\ \pi\ \sigma^2)^{-1} \exp(-1/(2\sigma)\ [x-\mu]^2)$

Standaard mu=0, sigma=1

$\varphi(x) = (2\ \pi)^{-1} \exp(-1/2\ [x]^2)$

Probability density function van N(mu=0, sigma=1)



Cumulative distribution function N(mu=0, sigma=1)

Standaard mu=0, sigma=1

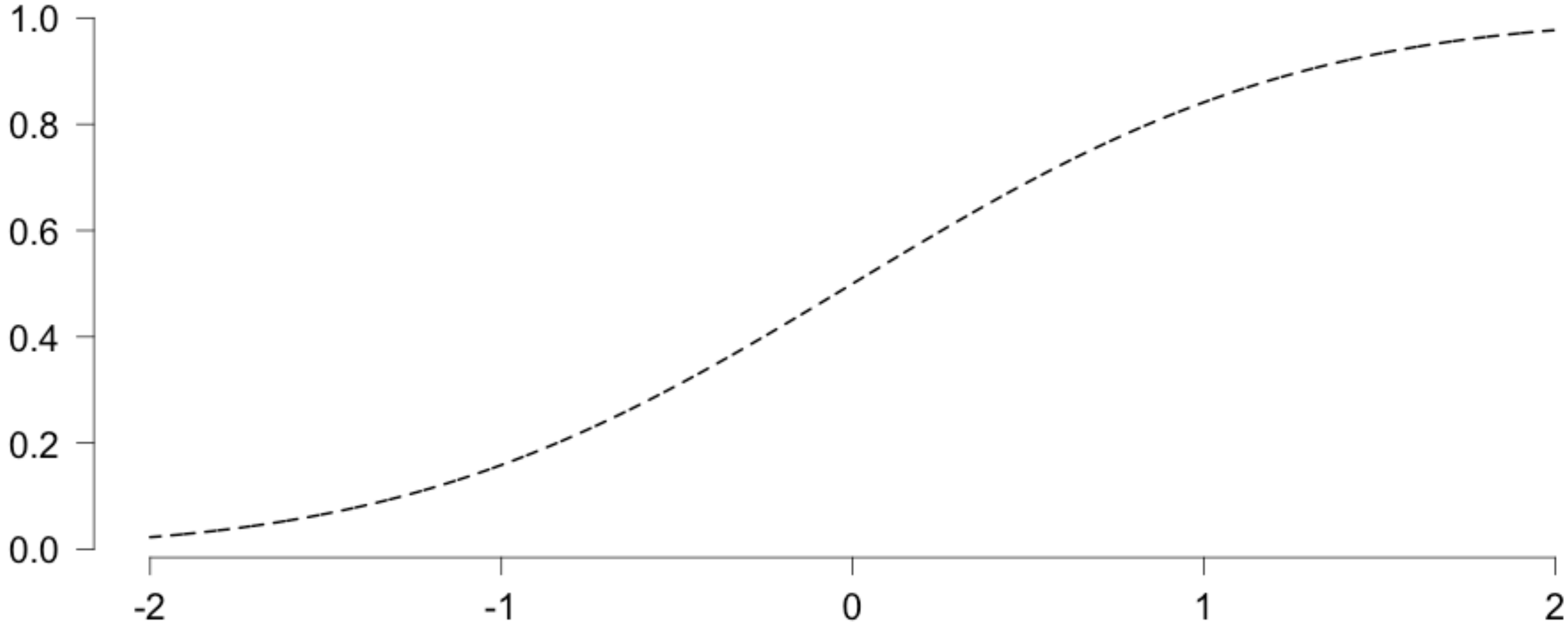
$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \varphi(x)dx$$

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} (2\ \pi)^{-1} \exp(-1/2\ [x]^2)\ dx$$

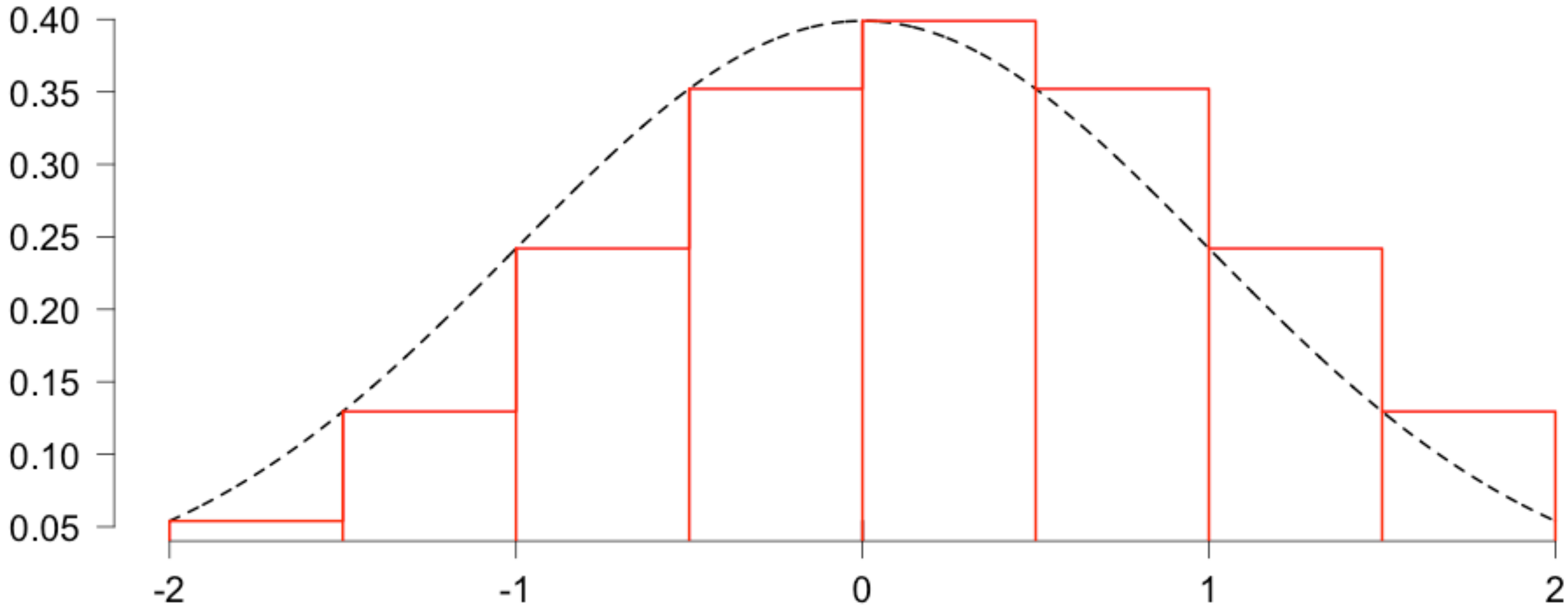
$$\lim_{y \to \infty} \Phi(y) = 1$$

$$\int_{-1.96}^{1.96} \varphi(x)dx = 0.95$$

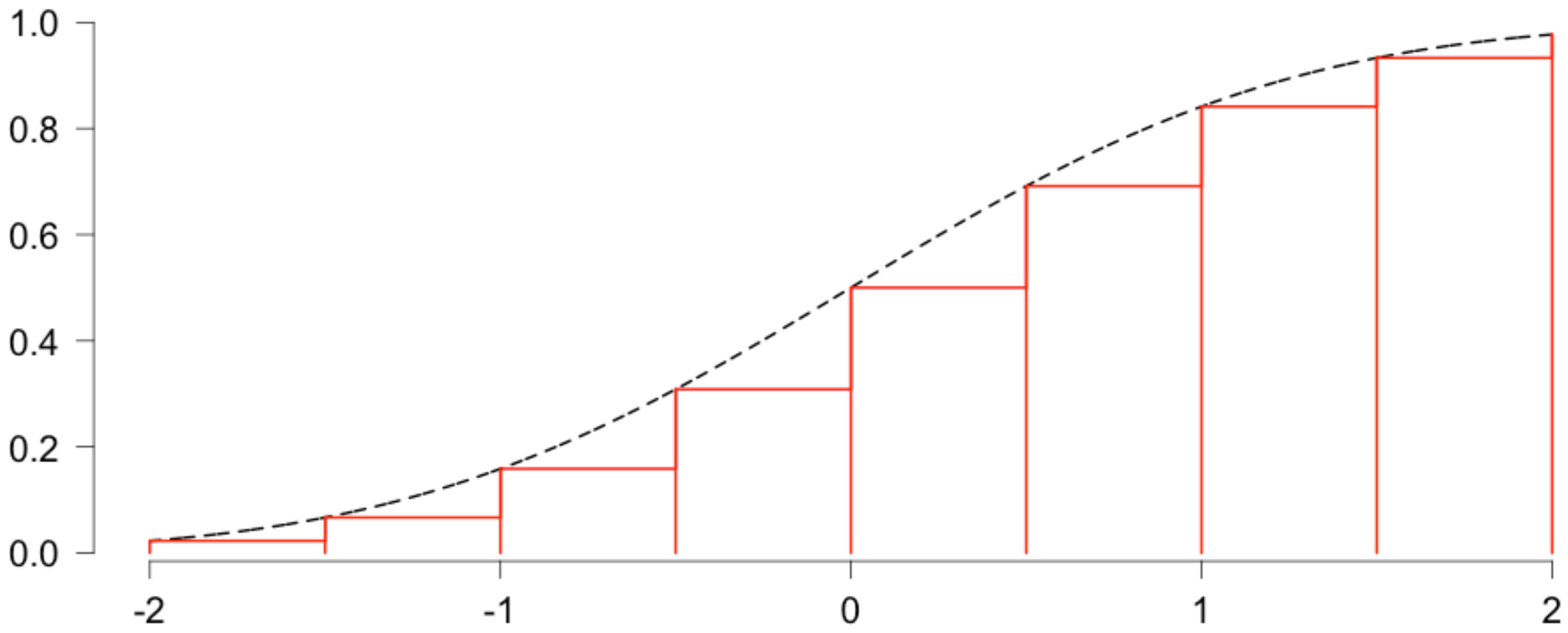
Cumulative distribution function N(mu=0, sigma=1)



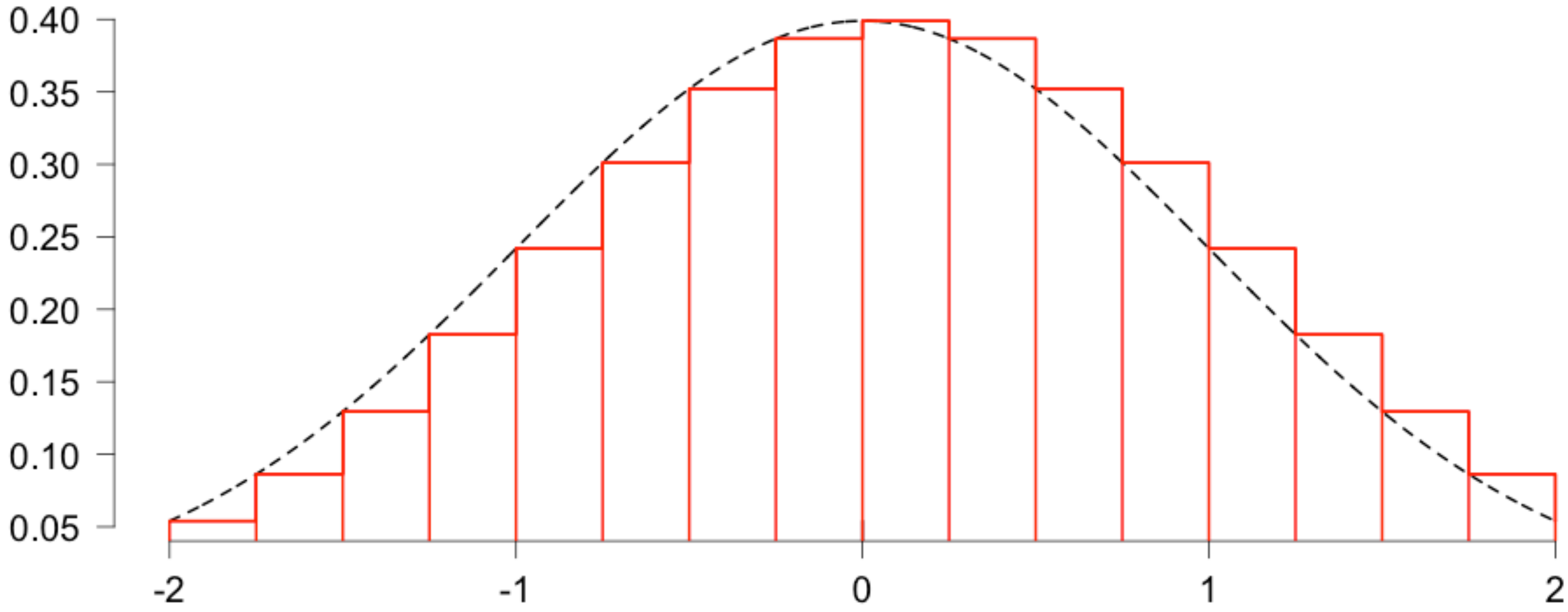
Pdf van N(mu=0, sigma=1), h=1



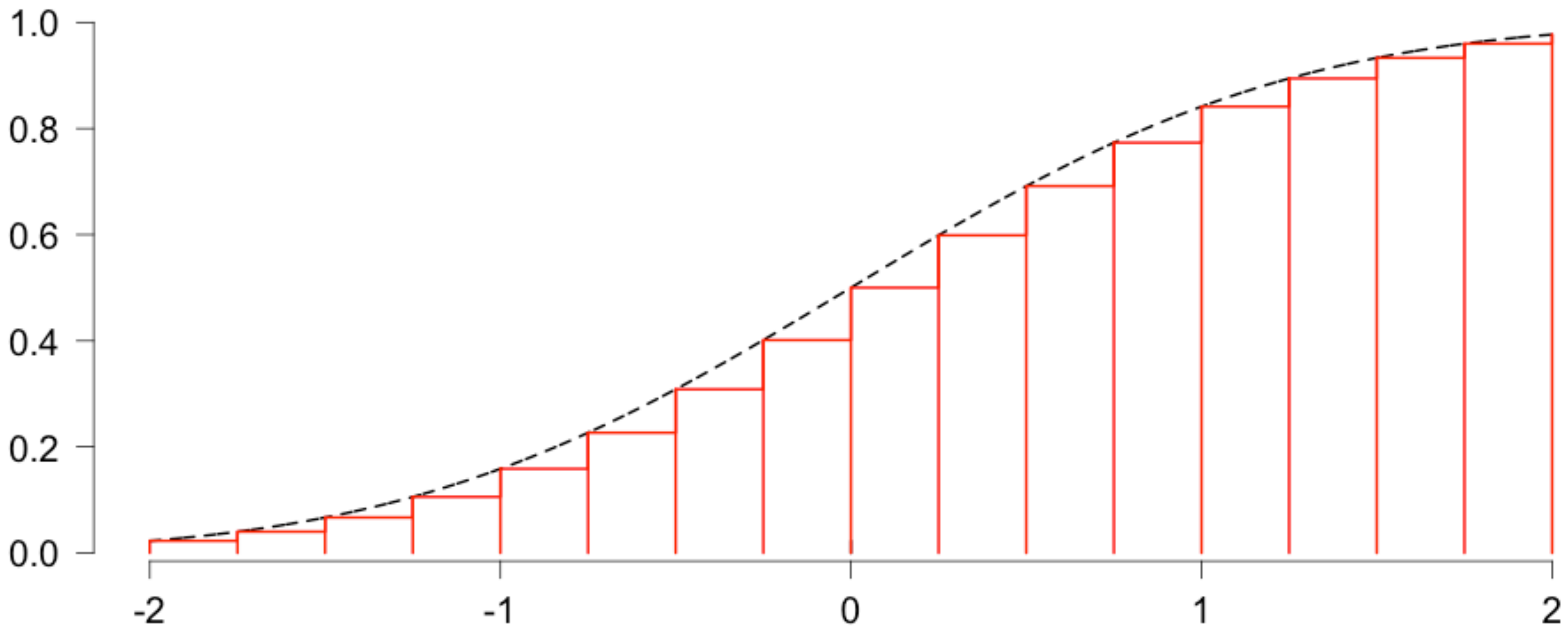
Cdf van N(mu=0, sigma=1), h=1



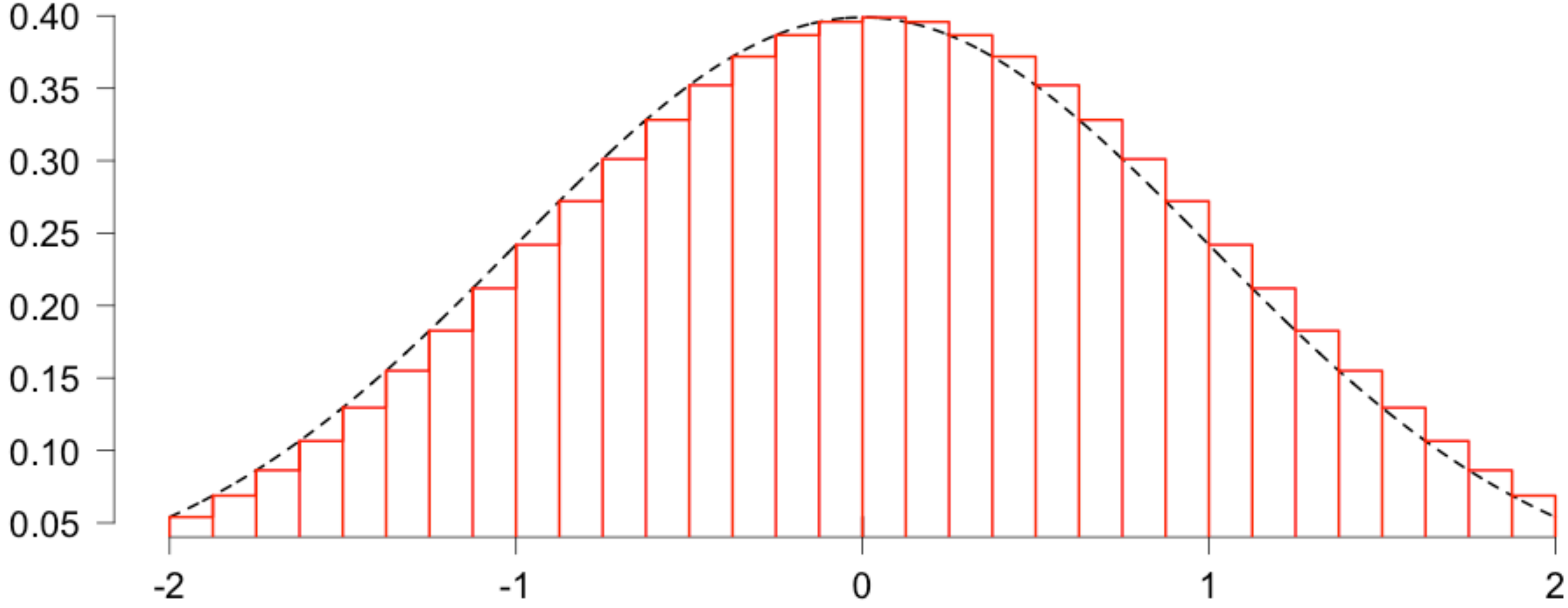
Pdf van N(mu=0, sigma=1), h=0.5



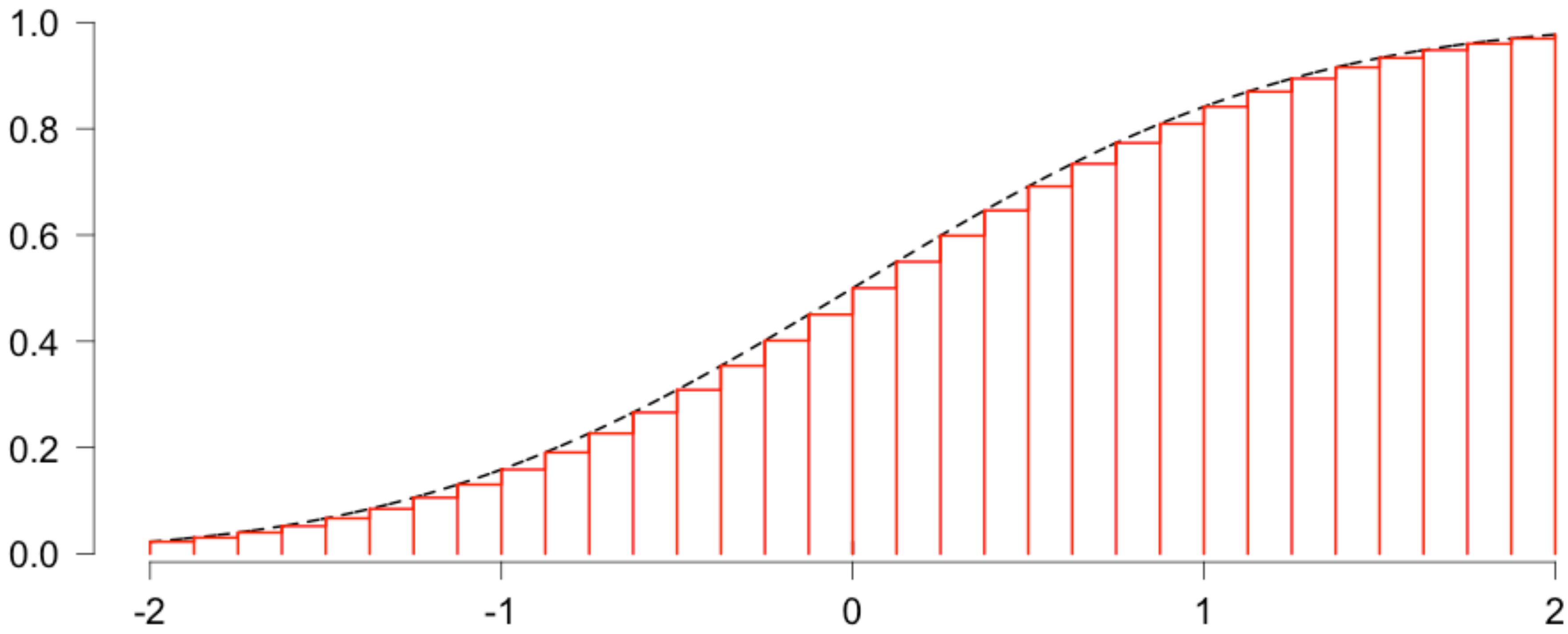
Cdf van N(mu=0, sigma=1), h=0.5



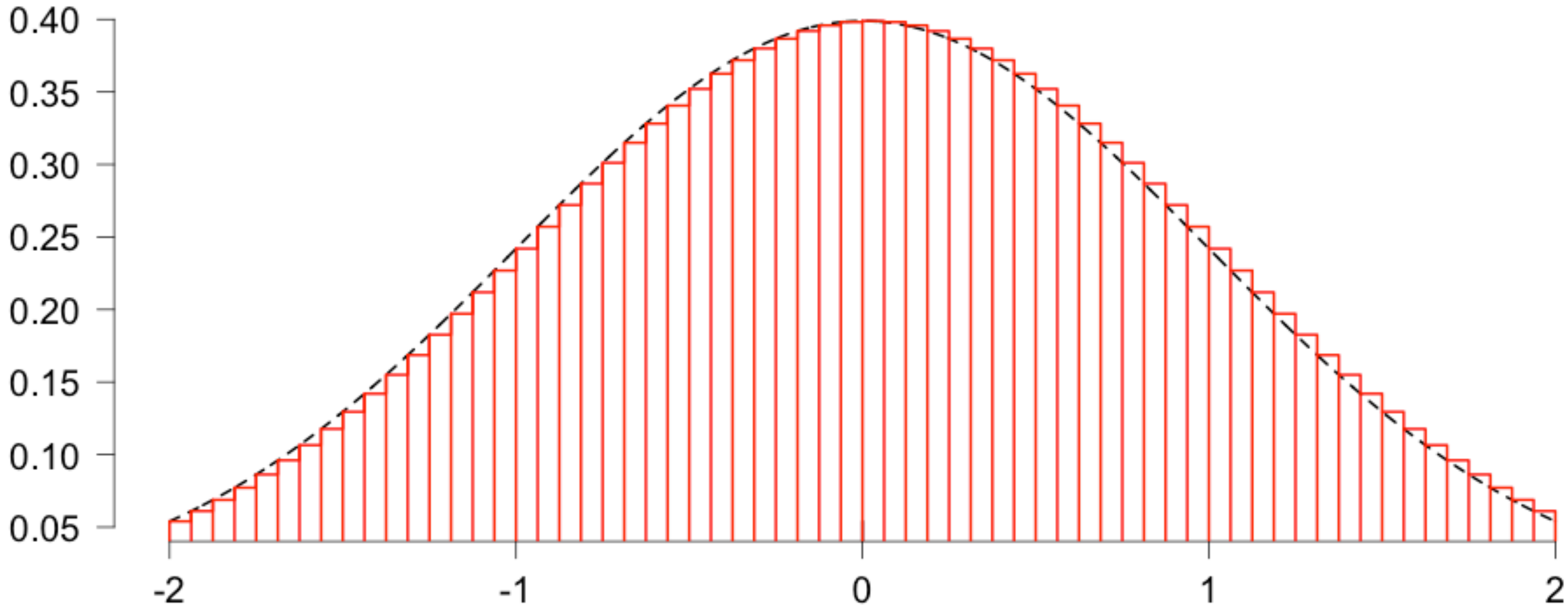
Pdf van N(mu=0, sigma=1), h=0.25



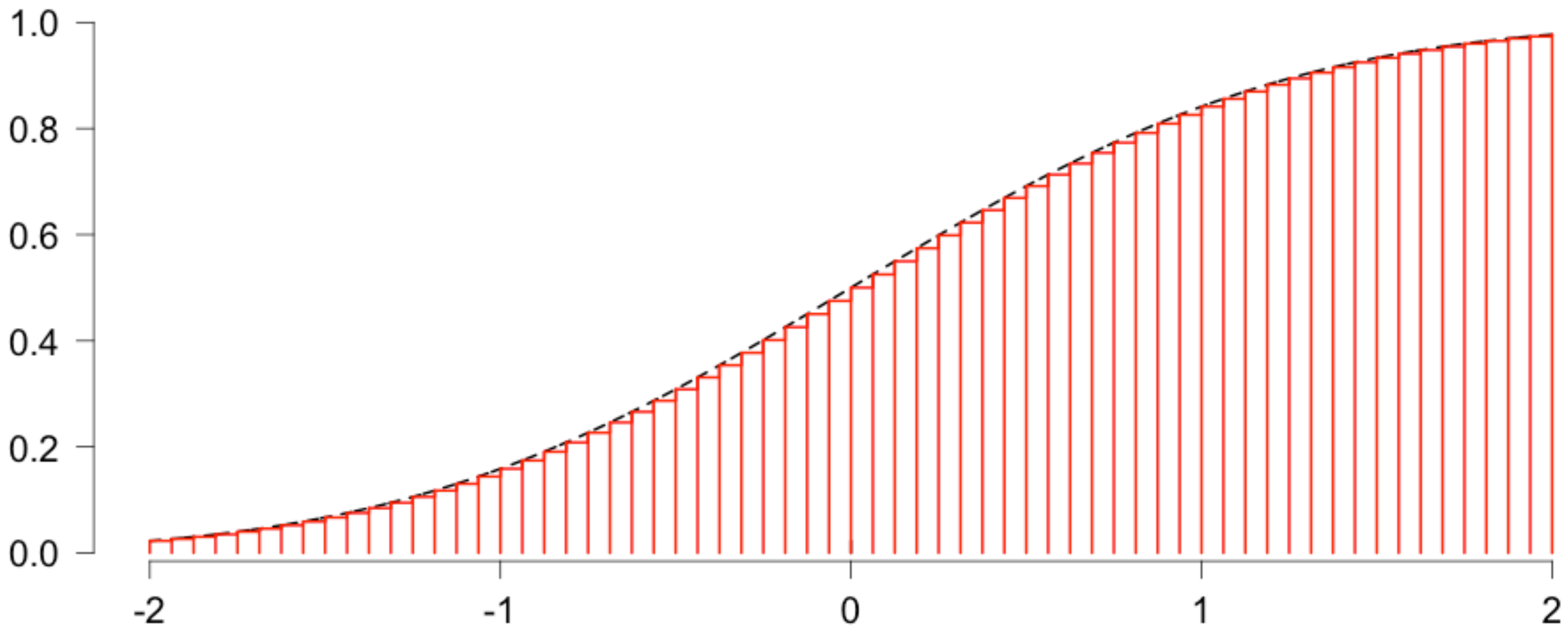
Cdf van N(mu=0, sigma=1), h=0.25



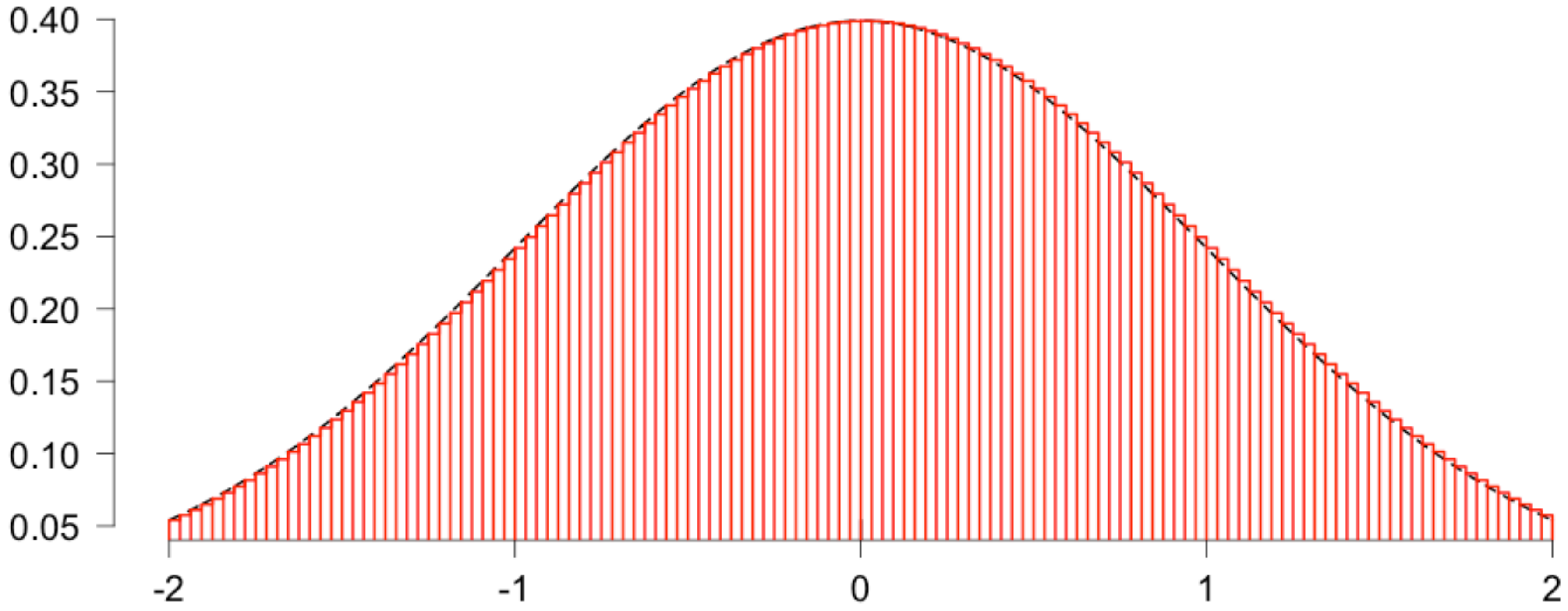
Pdf van N(mu=0, sigma=1), h=0.125



Cdf van N(mu=0, sigma=1), h=0.125



Pdf van N(mu=0, sigma=1), h=0.0625



Cdf van N(mu=0, sigma=1), h=0.0625