Functies van vectoren

Alexander Ly

Psychological Methods
University of Amsterdam

15 September 2014

Overview

Overview

Matrices

Een matrix schrijven we vaak met een hoofdletter A. Een matrix A bestaat uit rijen en kolommen, bijvoorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

en we zeggen ook wel dat A een 2×2 vierkante matrix is.

Rechthoekige matrices

Een matrix A kan ook rechthoekig zijn. Bijvoorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \pi \\ 1 & e \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \pi \\ 1 & e \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \tag{2}$$

dan zeggen we dat A een 3×2 matrix is.

Transponeren: Van kolom naar rij

Stel

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

dan

$$A^T = A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Omdat A vierkant is, heeft A' dezelfde dimensies.

Transponeren: Van kolom naar rij

Stel

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \pi \\ 1 & e \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \pi \\ 1 & e \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \tag{5}$$

dan

$$A^T = A' = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ \pi & e & 9 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ \pi & e & 9 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Als A is $r \times k$-dimensionaal, dan is A^T $k \times r$-dimensionaal.

Overview

Functies van getallen

In de colleges hebben we het gehad over functies van getallen naar getallen. We hadden bijvoorbeeld $f : X \to Y$, waar X, Y collecties getallen waren. Je stopt een getal x in f en zij geeft je een getal y terug. $x \mapsto f(x) = y$.

Functies van getallen

We hebben ook lineaire functies besproken.

$$y = f(x) = ax + b \text{ met } a, b \text{ gegeven getallen} \tag{7}$$

waarbij a gewoon een scalaire vermenigvuldiging is en b de intercept. We gaan nu alleen lineaire functies met intercept $b = 0$ bespreken.

$$y = f(x) = ax \tag{8}$$

Voorwaartse en inverse vraagstukken

Gegeven een lineaire functie $f : X \to Y$,

$$y = f(x) = ax, \tag{9}$$

waarbij a bekend is, kunnen we twee soorten vragen stellen:

1. Voorwaarts: Gegeven x bereken y.
2. Inverse: Gegeven y vind de bijbehorende x zodanig dat $f(x) = y$

Matrices zijn lineaire functies van vectoren

Een lineaire functie van een dimensionale x naar een-dimensionale y

$$y = f(x) = ax, \tag{10}$$

heeft een analogie voor vectoren $\vec{x}, \vec{y}$, waarbij a vervangen wordt door een matrix A met de dimensies die corresponderen met $\vec{x}, \vec{y}$.

Voorbeeld voorwaarts

Stel $\vec{x} = (x_1, x_2)$ bestaat uit een participant's "feiten-intelligentie" x_1 en "probleemoplossend vermogen" x_2 en we weten laten deze participant drie testen Y_1, Y_2, Y_3 uit voeren.
Stel dat Y_1 zo ontworpen is dat het alleen van de participant's "feiten-intelligentie" afhangt, Y_2 ontworpen is voor mensen met een perfect gebalanceerde mix is tussen de twee vermogens en y_3 volledig van probleemoplossend vermogen afhangt.
Gegeven $\vec{x}$ dan kunnen we nu de test resultaten voorspellen.

Voorbeeld voorwaarts

Stel $\vec{x} = (30, 70)$. Dan verwachten we dat

$$\begin{aligned} y_1 &= \quad 1x_1 + 0x_2 = 30 && (11) \\ y_2 &= 0.5x_1 + 0.5x_2 = 50 && (12) \\ y_3 &= \quad 0x_1 + 1x_2 = 70 && (13) \end{aligned}$$

We kunnen dit ook schrijven als $\vec{y} = A\vec{x}$ met

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Conformeren van dimensies

Stel $\vec{x} = (30, 70)$. Dan met

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

hebben we

$$A\vec{x} = \vec{y} \tag{16}$$

$$[r \times k][k \times 1] = [r \times 1] \tag{17}$$

Merk op dat A een 3×2 matrix en we kunnen $\vec{x}$ zien als een 2×1 matrix. Het resultaat is een 3×1 matrix. Dus $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^r$, in dit geval $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Samenstelling van functies

Met

$$
\begin{aligned}
A\vec{x} &= \vec{y} \qquad (18)\\
[r \times k][k \times 1] &= [r \times 1] \qquad (19)
\end{aligned}
$$

hebben we een functie $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^r$, in dit geval $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. We kunnen ook een lineaire functie maken $g : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^m$. Dan is de matrix B die bij g hoort van dimensie $m \times r$

$$B\vec{y} = \vec{z} \qquad (20)$$

$$[m \times r][r \times 1] = [m \times 1] \qquad (21)$$

$$BA\vec{x} = \vec{z} \qquad (22)$$

$$[m \times r][r \times k][k \times 1] = [m \times 1] \qquad (23)$$

Niet commutatief samenstelling

In het algemeen geldt $f(g(x)) \neq g(f(x))$. Dus ook

$$AB \neq BA \tag{24}$$

- In het bijzonder, als A een $r \times k$-dimensionaal matrix is en B een $m \times r$ dimensionaal dan is de samenstelling BA wel gedefinieerd, omdat de dimensies kloppen $[m \times r][r \times k]$.
- Dus BA is een $m \times k$ matrix.
- Maar AB slaat nergens op $[r \times k][m \times r]$ als $k \neq m$.

Niet commutatief samenstelling

In het algemeen geldt $f(g(x)) \neq g(f(x))$. Dus ook

$$AB \neq BA \tag{24}$$

- In het bijzonder, als A een $r \times k$-dimensionaal matrix is en B een $m \times r$ dimensionaal dan is de samenstelling BA wel gedefinieerd, omdat de dimensies kloppen $[m \times r][r \times k]$.
- Dus BA is een $m \times k$ matrix.
- Maar AB slaat nergens op $[r \times k][m \times r]$ als $k \neq m$.

Niet commutatief samenstelling

In het algemeen geldt $f(g(x)) \neq g(f(x))$. Dus ook

$$AB \neq BA \tag{24}$$

- In het bijzonder, als A een $r \times k$-dimensionaal matrix is en B een $m \times r$ dimensionaal dan is de samenstelling BA wel gedefinieerd, omdat de dimensies kloppen $[m \times r][r \times k]$.
- Dus BA is een $m \times k$ matrix.
- Maar AB slaat nergens op $[r \times k][m \times r]$ als $k \neq m$.

Optellen van lineaire functies

ALLEEN ALS A, B van dezelfde dimensies zijn kunnen we het volgende definieren $A + B = C$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0.5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2.5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Matrix regels

ALLEEN ALS A, B van dezelfde dimensies zijn kunnen we het volgende definieren $A + B = C$

- $A + B = B + A$
- cA is coordinaat gewijs vermenigvuldigen
- $AB \neq BA$
- $(A^T)^T = A$

Inverse

Wanneer A en $\vec{y}$ gegeven, dan doen moeten we $\vec{x}$ vinden d.m.v. een inverse. Daarvoor hebben we een vierkante matrix A nodig. Voorbeeld:

$$3x_2 = 2x_1 - 4 \tag{26}$$
$$6x_2 = 3x_1 + 2 \tag{27}$$

Herschrijven

$$-2x_1 + 3x_2 = -4 \tag{28}$$
$$3x_1 + 6x_2 = 2 \tag{29}$$

Inverse

Wanneer A en $\vec{y}$ gegeven zijn, dan doen moeten we $\vec{x}$ vinden d.m.v. een inverse. Daarvoor hebben we een vierkante matrix A nodig. Voorbeeld:

$$-2x_1 + 3x_2 = -4 \tag{30}$$

$$3x_1 + 6x_2 = 2 \tag{31}$$

Herschrijven als $A\vec{x} = \vec{y}$ met

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \tag{32}$$

$\vec{y} = (-4, 2)$.