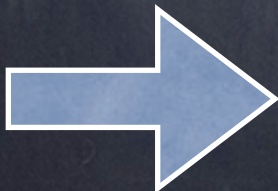


Wiskunde Module

Basisprogramma Psychologische Methodenleer
Alexander Ly (Raoul Grasman)

We behandelen voornamelijk algebra en differentiëren van functies

vr	algebra, incl. logaritmen
ma	functies, 1e & 2e orde polynomen
wo	afgeleiden, differentiëren
vr	differentiëren en integreren
ma	matrix algebra



Programma van vandaag

- Motivatie matrices
- Optellen van vectoren
- Functies van vectoren, matrices
- Simultane vergelijkingen en matrices
- Determinant
- Eigenwaarden en eigenvectoren

Motivatie: matrix algebra

- Netwerken (Prof dr Borsboom, dr Cramer, Sacha, drs Borkulo)
- Multivariate analyse (dr Molenaar, dr Rhemtulla)
- Cognitive psychology (dr Grasman, dr Van Maanen,
- Statistische onderzoeksmethoden (Prof dr Wagenmakers, prof dr Van der Maas, dr Verhagen, Helen, Dora)

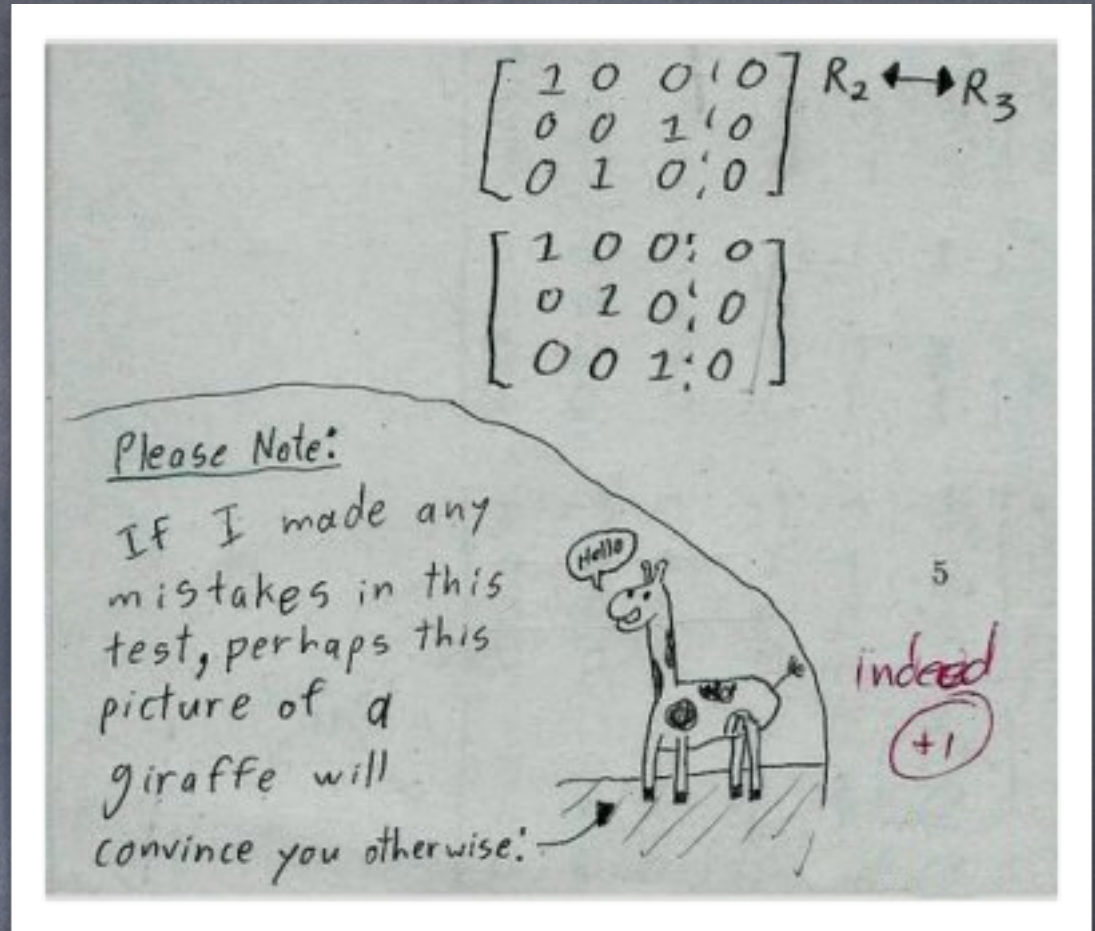
In de psychologie doen we vaak meerdere meting tegelijkertijd (IQ)

- X_1 = Score wiskundige vragen
- X_2 = Score taal vragen
- X_3 = Score logica vragen
- X_4 = Score visuele inzichtsvragen

In de psychologie doen we
vaak meerdere meting
tegelijkertijd van een persoon

- X_1 = Bloeddruk
- X_2 = Gemiddelde slaapuren / nacht
- X_3 = Sporturen
- X_4 = Vloeistof dat je drinkt
- X_5 = Facebooktijd
- X_6 = Intensiteit amygdala
- X_7 = Zuurstof gebruik in pre-frontale cortex

Elementaire Vector Algebra



Programma van vandaag

- Motivatie matrices
- Getallen en vectoren
- Functies en matrices
- Simultane vergelijkingen en matrices
- Determinant
- Eigenwaarden en eigenvectoren

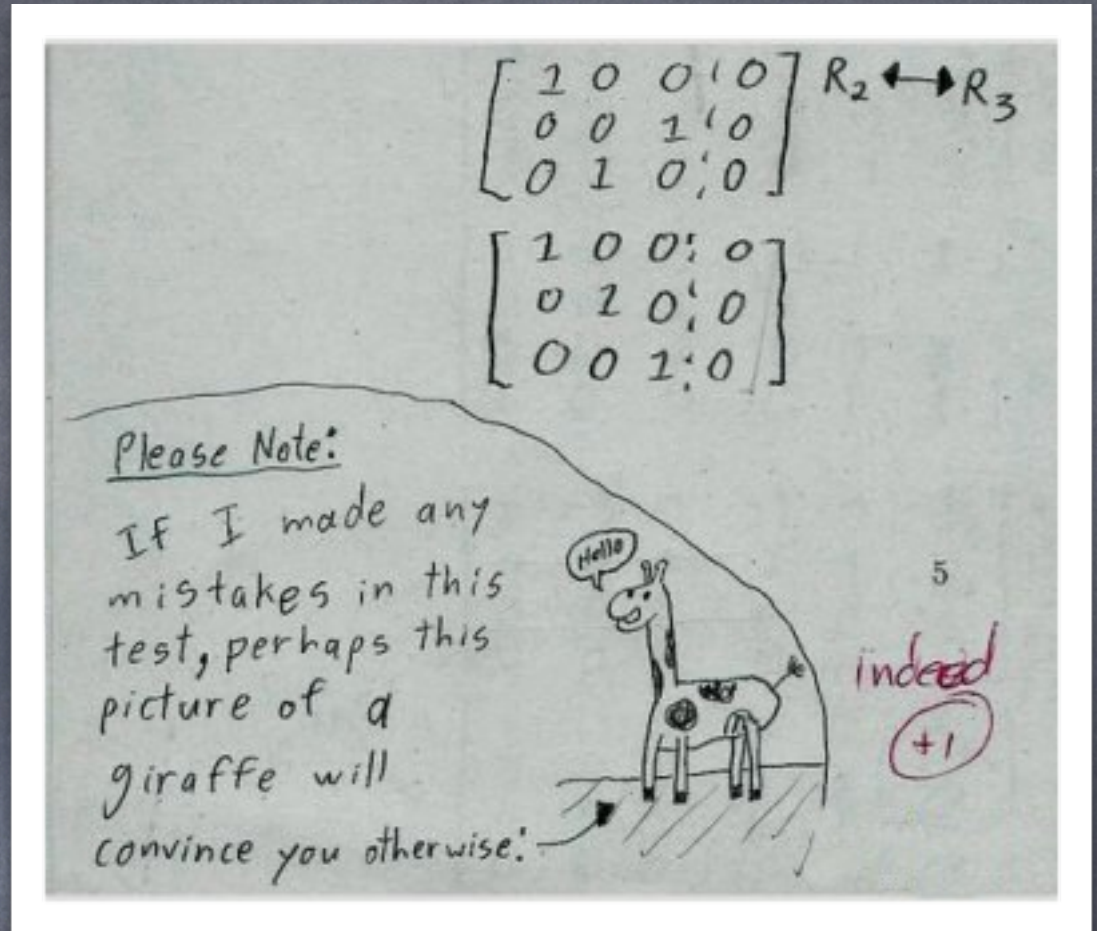
Notatie en meetkunde

- 05a Getallen: Vectoren.pdf
- 05b Matrices: Functies op vectoren.pdf

Programma van vandaag

- Motivatie matrices
- Optellen van vectoren
- Functies van vectoren, matrices
- Simultane vergelijkingen en matrices
- Determinant
- Eigenwaarden en eigenvectoren

Elementaire Matrix Algebra



Stelsels vergelijkingen zijn soms niet oplosbaar en hebben soms oneindig veel oplossingen

Simultane vergelijkingen moeten tegelijk waar zijn

bijv.
$$\begin{cases} 3y = 2x - 4 \\ 6y = 3x + 2 \end{cases}$$

oplossen gaat door y te elimineren:

herschrijf	1e vergl. maal -2	elimineer y
$\begin{cases} -2x + 3y = -4 \\ -3x + 6y = 2 \end{cases}$	$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 8 \\ -3x + 6y = 2 \end{cases}$	$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 8 \\ \underline{-3x + 6y = 2} \end{cases} +$ $x + 0 = 10$

$$\therefore x = 10 \text{ en } y = (2 \cdot 10 - 4) / 3 = 16/3$$

Stelsels vergelijkingen zijn soms niet oplosbaar en hebben soms oneindig veel oplossingen

Simultane vergelijkingen moeten tegelijk waar zijn

bijv.
$$\begin{cases} 3x_2 = 2x_1 - 4 \\ 6x_2 = 3x_1 + 2 \end{cases}$$

oplossen gaat door x_2 te elimineren:

herschrijf

1e vergl. maal -2

Elimineer x_2

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = -4 \\ -3x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 = 8 \\ -3x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 = 8 \\ \underline{-3x_1 + 6x_2 = 2} \end{cases} +$$
$$x_1 + 0 = 10$$

$$\therefore x_1 = 10 \text{ en } x_2 = (2 \cdot 10 - 4) / 3 = 16/3$$

Stelsels vergelijkingen zijn soms niet oplosbaar en hebben soms oneindig veel oplossingen

bijv.
$$\begin{cases} 3x_2 = 2x_1 - 4 \\ 6x_2 = 3x_1 + 2 \end{cases}$$

oplossen gaat door x_2 te elimineren:

herschrijf

1e vergl. maal -2

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = -4 \\ -3x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$$

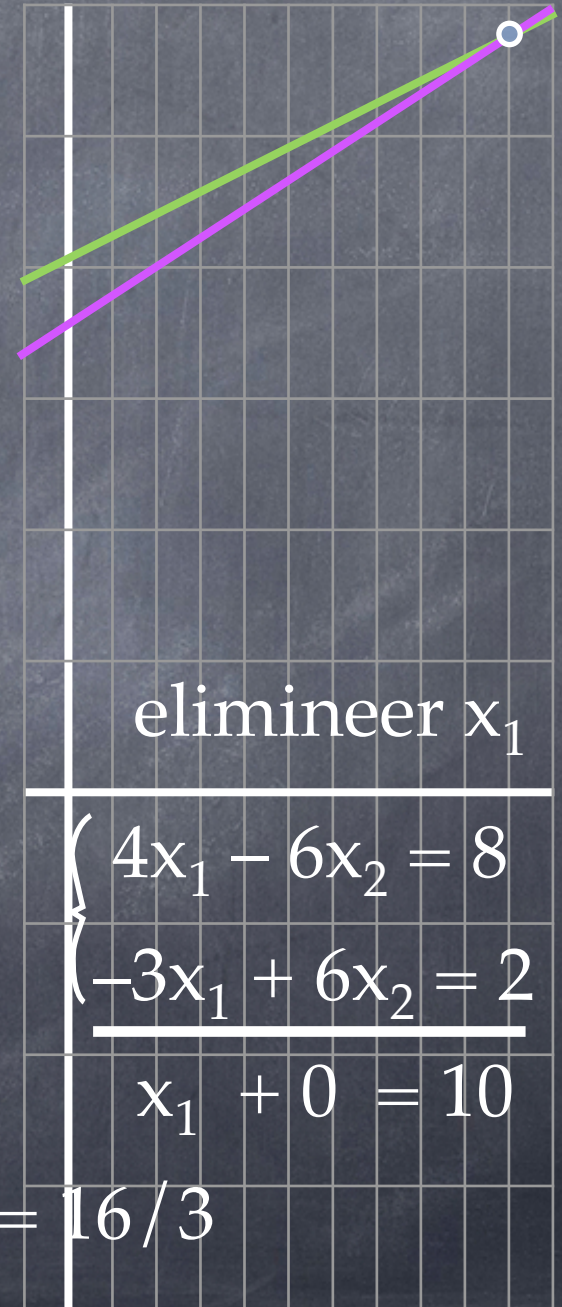
$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 = 8 \\ -3x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

elimineer x_1	
$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 = 8 \\ -3x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$	
$\hline$	+
$x_1 + 0 = 10$	

$$\therefore x_1 = 10 \text{ en } x_2 = (2 \cdot 10 - 4) / 3 = 16/3$$



Stelsels vergelijkingen zijn soms niet oplosbaar en hebben soms oneindig veel oplossingen

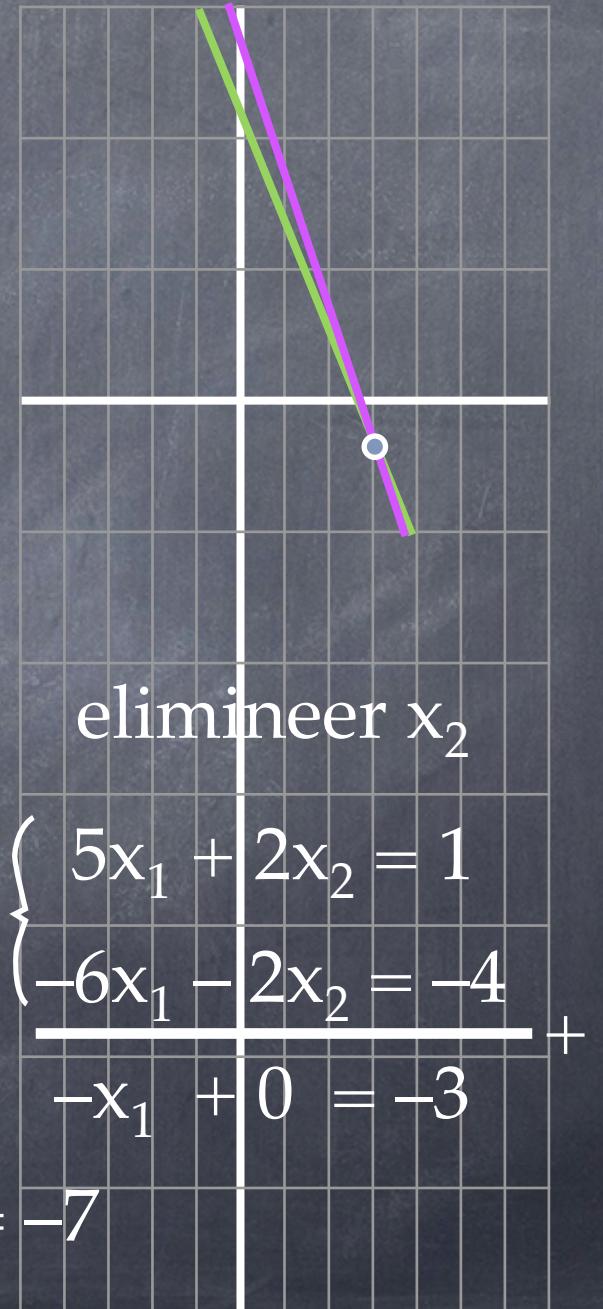
bijv.
$$\begin{cases} 2x_2 = -5x_1 + 1 \\ 5x_2 = -15x_1 + 10 \end{cases}$$

oplossen gaat door x_2 te elimineren:

herschrijf 2e vergl. maal $-2/5$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 1 \\ 15x_1 + 5x_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 1 \\ -6x_1 - 2x_2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 1 \\ -6x_1 - 2x_2 = -4 \end{cases} & + & \\ \hline -x_1 + 0 & = & -3 \end{array}$$

$$\therefore x_1 = 3 \text{ en } x_2 = (-5 \cdot 3 + 1)/2 = -7$$



Stelsels vergelijkingen zijn soms niet oplosbaar en hebben soms oneindig veel oplossingen

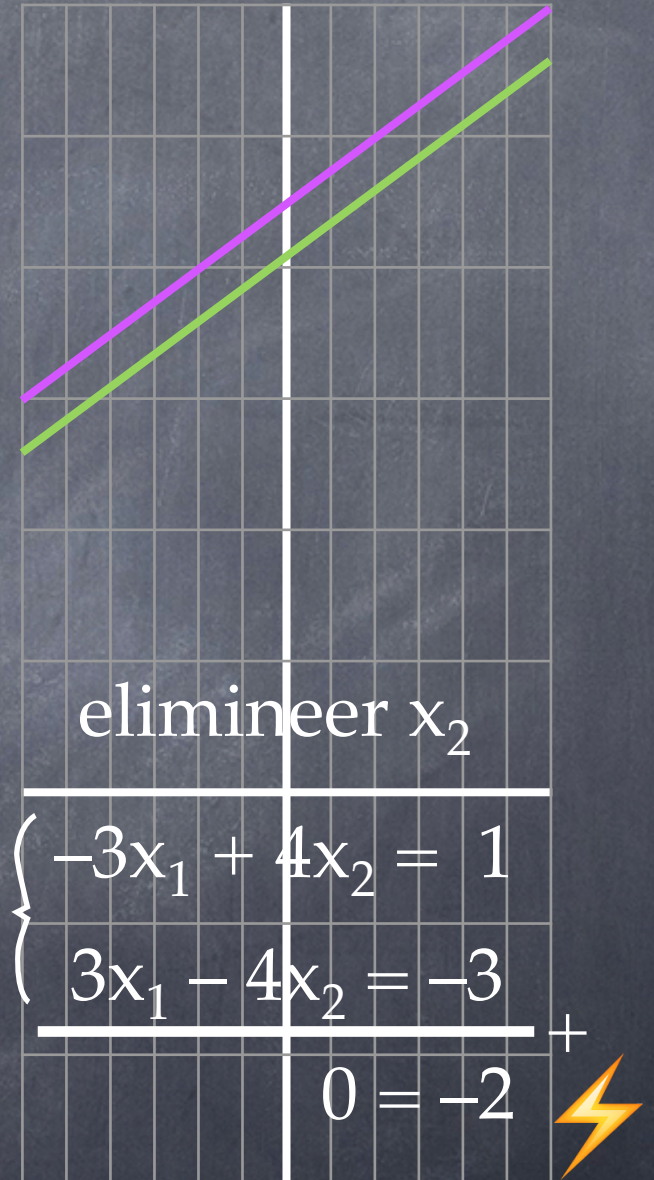
bijv.
$$\begin{cases} 4x_2 = 3x_1 + 1 \\ -8x_2 = -6x_1 - 6 \end{cases}$$

oplossen gaat door y te elimineren:

herschrijf 2e vergl. maal $\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 = 1 \\ 6x_1 - 8x_2 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = -3 \end{cases} \\ \hline 0 = -2 \end{array} +$$

$\therefore$ voor geen enkele x_1 zijn vergelijkingen simultaan waar!



Stelsels vergelijkingen zijn soms niet oplosbaar en hebben soms oneindig veel oplossingen

bijv.
$$\begin{cases} 4x_2 = 3x_1 \\ -8x_2 + 2 = -6x_1 + 2 \end{cases}$$

oplossen gaat door x_2 te elimineren:

herschrijf

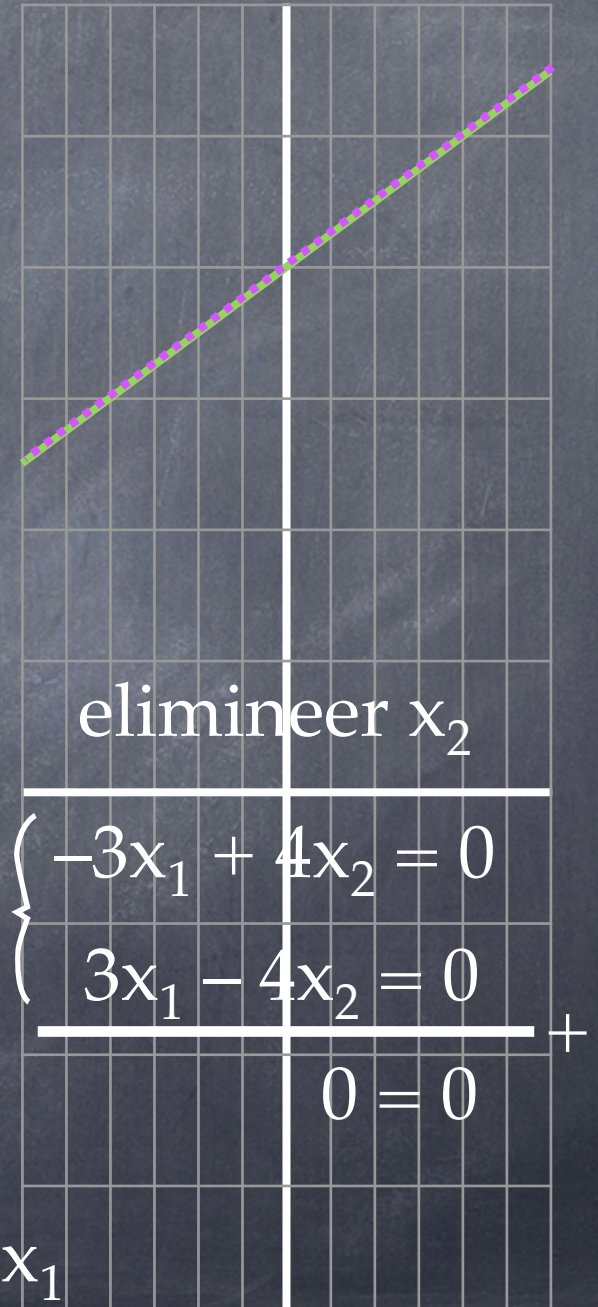
2e vergl. maal $\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 = 0 \\ 6x_1 - 8x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{elimineer } x_2 \\ \hline \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \\ \hline 0 = 0 \end{array} +$$

$\therefore$ hangt niet af van x_1 ; is waar voor alle x_1



De oplossingen van een stelsel vergelijkingen hangt alleen af van de coëfficiënten

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = -4 \\ -3x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$$

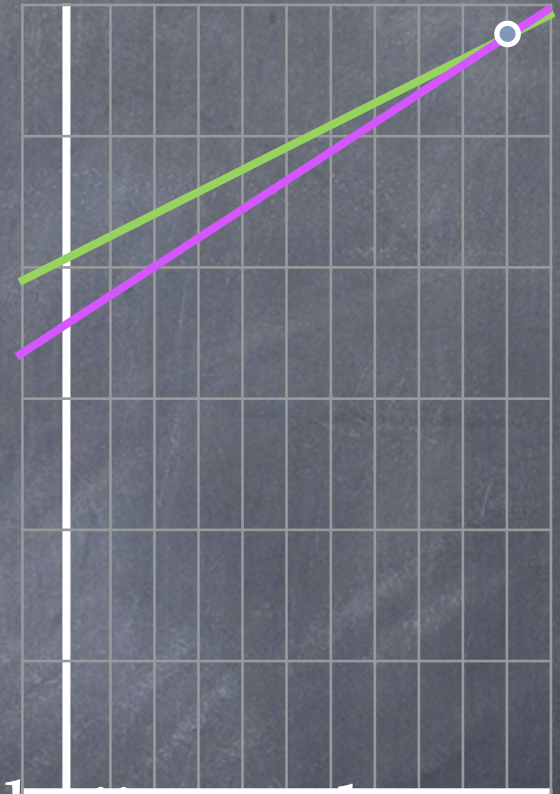
$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Met behulp van matrix algebra te schrijven als

eigenschappen
matrix bekijken

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

wanneer zijn er oplossingen?



Matrices bestaan in verschillende maten en vormen, en hebben soms speciale namen

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = -4 \\ -3x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

rijen

4 × 3

kolommen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

2 × 4

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3 × 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

1 × 3

rij vector

hoofd-diagonaal

kolom vector

scalair

$$\begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix} = 9$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

symmetrisch

3 × 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

identiteits matrix

Matrices worden elementsgewijs opgeteld,
afgetrokken of met een scalar vermenigvuldigd

moeten conformeren

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 13 & 13 & 12 & 12 \end{bmatrix}$$

$2 \times 4 \quad \longleftrightarrow \quad 2 \times 4$

2×4

zelfde
dimensies

$$\underline{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{y}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{x}} - \underline{\underline{y}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad 2 \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \end{bmatrix}$$

$3 \times 1 \quad \quad 3 \times 1 \quad \quad 3 \times 1$

Matrix vermenigvuldiging wordt gedefinieerd op basis van stelsels vergelijkingen

Een matrix maal een vector levert een stelsel op

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 \\ bx_1 + dx_2 \end{bmatrix}$$

motivatie voor matrix
vermenigvuldiging

voorb.

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \\ -2 & 3 \\ -3 & 6 \\ 2 \times 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ x_1 \\ x_2 \\ 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Ax} \\ -2x_1 + 3x_2 \\ -3x_1 + 6x_2 \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ -4 \\ 2 \\ \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = -4 \\ -3x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$$

moeten conformeren

Matrix vermenigvuldiging wordt gedefinieerd op basis van stelsels vergelijkingen

Een matrix maal een vector levert een stelsel op

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 \\ bx_1 + dx_2 \end{bmatrix} \quad \text{motivatie voor matrix vermenigvuldiging}$$

Uitbreiding naar matrix keer matrix is kolomsgewijs

$$\begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 + ex_3 & ay_1 + cy_2 + ey_3 \\ bx_1 + dx_2 + fx_3 & by_1 + dy_2 + fy_3 \end{bmatrix}$$

A B AB

Matrix vermenigvuldiging wordt gedefinieerd op basis van stelsels vergelijkingen

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{A}} \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{B}} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 + ex_3 & ay_1 + cy_2 + ey_3 \\ bx_1 + dx_2 + fx_3 & by_1 + dy_2 + fy_3 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{AB}} \end{array}$$

voorb.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) & 4 \cdot 0 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 19 \\ 8 & 50 \end{bmatrix}$$

Matrix vermenigvuldiging wordt gedefinieerd op basis van stelsels vergelijkingen

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 + ex_3 & ay_1 + cy_2 + ey_3 \\ bx_1 + dx_2 + fx_3 & by_1 + dy_2 + fy_3 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{A}} \quad \underline{\underline{B}} \qquad \underline{\underline{AB}} \end{array}$$

ezelsbruggetje

$$\underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underline{\underline{B}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 7$$

Matrix vermenigvuldiging wordt gedefinieerd op basis van stelsels vergelijkingen

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 + ex_3 & ay_1 + cy_2 + ey_3 \\ bx_1 + dx_2 + fx_3 & by_1 + dy_2 + fy_3 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{A}} \quad \underline{\underline{B}} \qquad \underline{\underline{AB}} \end{array}$$

ezelsbruggetje

$$\begin{array}{c} \underline{\underline{A}} \quad \underline{\underline{B}} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 7$$

$$2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot -2 = 4$$

Matrix vermenigvuldiging wordt gedefinieerd op basis van stelsels vergelijkingen

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 + ex_3 & ay_1 + cy_2 + ey_3 \\ bx_1 + dx_2 + fx_3 & by_1 + dy_2 + fy_3 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{A}} \quad \underline{\underline{B}} \qquad \qquad \underline{\underline{AB}} \end{array}$$

ezelsbruggetje

$$\begin{array}{c} \underline{\underline{A}} \quad \underline{\underline{B}} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 7$$

$$2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot -2 = 4$$

$$5 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot -2 = 7$$

Matrix vermenigvuldiging wordt gedefinieerd op basis van stelsels vergelijkingen

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 + ex_3 & ay_1 + cy_2 + ey_3 \\ bx_1 + dx_2 + fx_3 & by_1 + dy_2 + fy_3 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{A}} \quad \underline{\underline{B}} \qquad \underline{\underline{AB}} \end{array}$$

ezelsbruggetje

$$\begin{array}{c} \underline{\underline{A}} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{B}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 7 \\ 2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot -2 = 4 \\ 5 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot -2 = 7 \\ 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 10 \end{array}$$

Matrix vermenigvuldiging wordt gedefinieerd op basis van stelsels vergelijkingen

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 + ex_3 & ay_1 + cy_2 + ey_3 \\ bx_1 + dx_2 + fx_3 & by_1 + dy_2 + fy_3 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{A}} \quad \underline{\underline{B}} \qquad \qquad \underline{\underline{AB}} \end{array}$$

ezelsbruggetje

$$\begin{array}{c} \underline{\underline{A}} \quad \underline{\underline{B}} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \quad \therefore \underline{\underline{AB}} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$$

Matrix algebra lijkt heel erg op scalaire algebra

Algebra regels met getallen (scalair)

$$a + b = b + a$$

$$x + 0 = x$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$1 \cdot x = x$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Algebra regels met matrices

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$$

$$\boxed{\underline{A} \underline{B} \neq \underline{B} \underline{A}} \quad \text{in het algemeen (soms wel, bijv. } \underline{A}^2)$$

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \underline{B} + \underline{A} \underline{C}$$

De identiteitsmatrix functioneert als de 1 in matrix algebra; de nul-matrix als de 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

analogie: $x + 0 = x$

$$\boxed{\underline{A} + \underline{0} = \underline{A}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

identiteits matrix
kolom vector

analogie: $1 \cdot x = x$

$$\boxed{\underline{I}_3 \cdot \underline{a} = \underline{a}}$$

$$\boxed{\underline{I}_3 \cdot \underline{A} = \underline{A}}$$

Matrix vermenigvuldiging is niet commutatief

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 + ex_3 & ay_1 + cy_2 + ey_3 \\ bx_1 + dx_2 + fx_3 & by_1 + dy_2 + fy_3 \end{bmatrix} \\ \underline{A} \quad \underline{B} \qquad \underline{AB} \end{array}$$

ezelsbruggetje

$$\underline{B} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{A} \quad \therefore \underline{AB} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$$

Matrix vermenigvuldiging is niet commutatief

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 + ex_3 & ay_1 + cy_2 + ey_3 \\ bx_1 + dx_2 + fx_3 & by_1 + dy_2 + fy_3 \end{bmatrix} \\ \underline{A} \quad \underline{B} \qquad \underline{AB} \end{array}$$

ezelsbruggetje

$$\underline{B} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{A} \quad \therefore \underline{AB} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$$

Matrix vermenigvuldiging is niet commutatief

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 + ex_3 & ay_1 + cy_2 + ey_3 \\ bx_1 + dx_2 + fx_3 & by_1 + dy_2 + fy_3 \end{bmatrix} \\
 \underline{A} \quad \underline{B} \qquad \underline{AB}
 \end{array}$$

ezelsbruggetje

$$\begin{array}{c}
 \underline{B} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \underline{AB} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Matrix vermenigvuldiging is niet commutatief

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 + ex_3 & ay_1 + cy_2 + ey_3 \\ bx_1 + dx_2 + fx_3 & by_1 + dy_2 + fy_3 \end{bmatrix} \\ \underline{A} \quad \underline{B} \qquad \underline{AB} \end{array}$$

ezelsbruggetje

$$\underline{B} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{A} \quad \therefore \underline{AB} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$$

Matrix vermenigvuldiging is niet commutatief

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 + ex_3 & ay_1 + cy_2 + ey_3 \\ bx_1 + dx_2 + fx_3 & by_1 + dy_2 + fy_3 \end{bmatrix} \\ \underline{A} \quad \underline{B} \qquad \underline{AB} \end{array}$$

ezelsbruggetje

$$\begin{array}{c} \underline{B} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{A} \quad \therefore \underline{AB} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrix vermenigvuldiging is niet commutatief

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 + ex_3 & ay_1 + cy_2 + ey_3 \\ bx_1 + dx_2 + fx_3 & by_1 + dy_2 + fy_3 \end{bmatrix} \\ \underline{A} \quad \underline{B} \qquad \underline{AB} \end{array}$$

ezelsbruggetje

$$\underline{B} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \underline{AB} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$$

Matrix vermenigvuldiging is niet commutatief

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 + ex_3 & ay_1 + cy_2 + ey_3 \\ bx_1 + dx_2 + fx_3 & by_1 + dy_2 + fy_3 \end{bmatrix} \\ \underline{A} \quad \underline{B} \qquad \underline{AB} \end{array}$$

ezeelsbruggetje

$$\underline{B} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 15 & 9 & 3 \end{bmatrix} \quad \underline{A} \quad \therefore \underline{AB} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$$

Matrix vermenigvuldiging is niet commutatief

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 + ex_3 & ay_1 + cy_2 + ey_3 \\ bx_1 + dx_2 + fx_3 & by_1 + dy_2 + fy_3 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{A}} \quad \underline{\underline{B}} \qquad \qquad \underline{\underline{AB}} \end{array}$$

ezelsbruggetje

$$\begin{array}{c} \underline{\underline{B}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{A}} \quad \therefore \underline{\underline{AB}} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrix vermenigvuldiging is niet commutatief

$$\begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 + ex_3 & ay_1 + cy_2 + ey_3 \\ bx_1 + dx_2 + fx_3 & by_1 + dy_2 + fy_3 \end{bmatrix}$$

A B AB

ezelsbruggetje

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \underline{AB} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \quad \therefore \underline{BA} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 15 & 9 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore \underline{AB} \neq \underline{BA}$

Matrix algebra lijkt heel erg op scalaire algebra

Algebra regels met getallen (scalair)

$$a + b = b + a$$

$$x + 0 = x$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$1 \cdot x = x$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$x / x = x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$$

Algebra regels met matrices

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$$

$$\underline{A} + \underline{0} = \underline{A}$$

$$\boxed{\underline{A} \underline{B} \neq \underline{B} \underline{A}} \text{ (in het algemeen)}$$

$$\underline{I}_n \cdot \underline{A} = \underline{A}$$

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \underline{B} + \underline{A} \underline{C}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{I}_n$$

De inverse van een matrix lost het met de matrix verbonden stelsel vergelijkingen op

voorb.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \\ -2 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{x}} \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Ax}} \\ -2x_1 + 3x_2 \\ -3x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{y}} \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = -4 \\ -3x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$$

de matrix B waarvoor BA = identiteit heet de inverse

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

De inverse van een matrix lost het met de matrix verbonden stelsel vergelijkingen op

voorb.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \\ -2 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{x}} \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Ax}} \\ -2x_1 + 3x_2 \\ -3x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{y}} \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = -4 \\ -3x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$$

de matrix B waarvoor BA = identiteit heet de inverse

$$\begin{bmatrix} & & -2 & 3 \\ & & -3 & 6 \\ -2 & 1 & 1 & \\ -1 & \frac{2}{3} & & \end{bmatrix}$$

De inverse van een matrix lost het met de matrix verbonden stelsel vergelijkingen op

voorb.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \\ -2 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{x}} \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Ax}} \\ -2x_1 + 3x_2 \\ -3x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{y}} \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = -4 \\ -3x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$$

de matrix B waarvoor BA = identiteit heet de inverse

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De inverse van een matrix lost het met de matrix verbonden stelsel vergelijkingen op

voorb.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \\ -2 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{x}} \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Ax}} \\ -2x_1 + 3x_2 \\ -3x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{y}} \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = -4 \\ -3x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$$

de matrix $\underline{\underline{B}}$ waarvoor $\underline{\underline{BA}} = \text{identiteit}$ heet de inverse

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ is inverse}$$

notatie $\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

handig want $\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{y}} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{I}}_2\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{x}}$

De inverse van een matrix lost het met de matrix verbonden stelsel vergelijkingen op

voorb.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \\ -2 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{x}} \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Ax}} \\ -2x_1 + 3x_2 \\ -3x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{y}} \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = -4 \\ -3x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$$

de matrix B waarvoor BA = identiteit heet de inverse

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2x_1 + 3x_2 \\ -3x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot (-2x_1 + 3x_2) + 1 \cdot (-3x_1 + 6x_2) \\ -1 \cdot (-2x_1 + 3x_2) + \frac{2}{3}(-3x_1 + 6x_2) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 4x_1 - 6x_2 - 3x_1 + 6x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

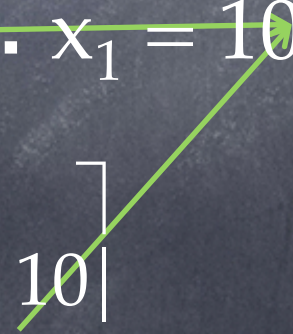
De inverse van een matrix lost het met de matrix verbonden stelsel vergelijkingen op

voorb.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \\ -2 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{x}} \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Ax}} \\ -2x_1 + 3x_2 \\ -3x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{y}} \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = -4 \\ -3x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$$

de matrix $\underline{\underline{B}}$ waarvoor $\underline{\underline{BA}} = \text{identiteit}$ heet de inverse

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2x_1 + 3x_2 \\ -3x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \therefore x_1 = 10, x_2 = 16/3$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot -4 + 1 \cdot 2 \\ -1 \cdot -4 + 2/3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16/3 \end{bmatrix}$$


De determinant geeft aan of de inverse bestaat en kan worden gebruikt om die te berekenen

voor een 2×2 matrix zijn determinant en inverse

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad |A| = a \cdot d - b \cdot c \quad \underline{A}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

voorb.

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Ax} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 + 3x_2 \\ -3x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = -4 \\ -3x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$$

$$|A| = -2 \cdot 6 - 3 \cdot -3 = -3$$

$$\therefore \underline{A}^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

De determinant geeft aan of de inverse bestaat en kan worden gebruikt om die te berekenen

voor een 2×2 matrix zijn determinant en inverse

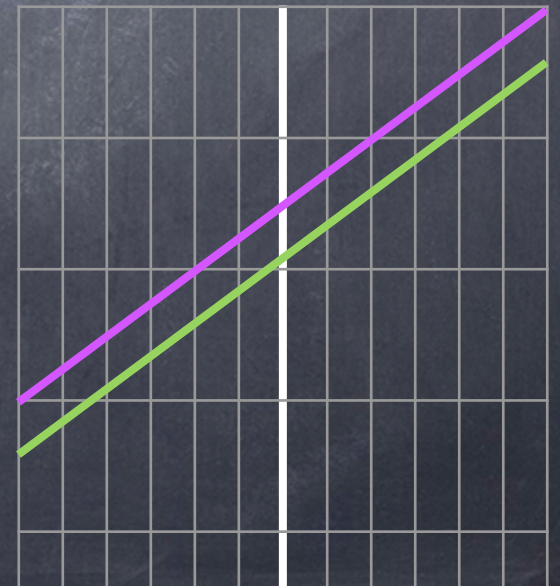
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad |A| = a \cdot d - b \cdot c \quad \underline{A}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

voorb.

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 = 1 \\ 6x_1 - 8x_2 = -6 \end{cases}$$

geen oplossingen

$$|A| = -3 \cdot -8 - 6 \cdot 4 = 0$$



De determinant geeft aan of de inverse bestaat en kan worden gebruikt om die te berekenen

voor een 2×2 matrix zijn determinant en inverse

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad |A| = a \cdot d - b \cdot c \quad \underline{A}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

voorb.

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -3 \cdot -8 - 6 \cdot 4 = 0$$

geen unieke oplossing

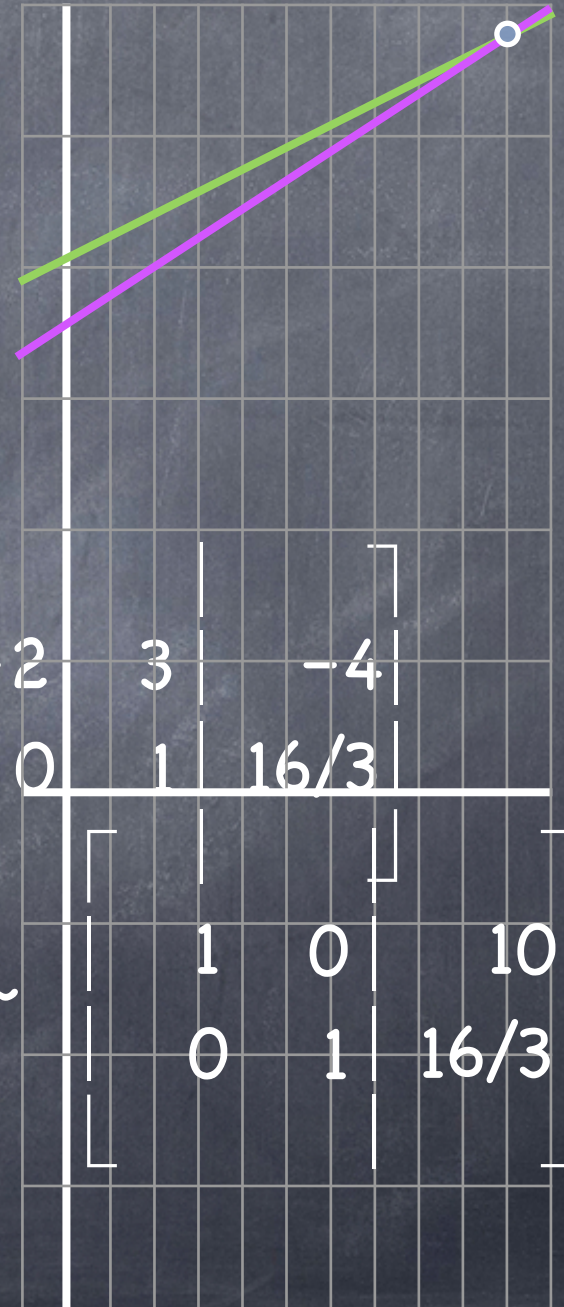
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 = 0 \\ 6x_1 - 8x_2 = 0 \end{cases}$$

determinant geeft
aan of lijnen parallel
zijn



De oplossingen van een stelsel vergelijkingen hangt alleen af van de coëfficiënten

$$\begin{cases} -2x + 3y = -4 \\ -3x + 6y = 2 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & -4 \\ -3 & 6 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot 2/3} \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & -4 \\ -2 & 4 & 4/3 \end{array} \right] \xrightarrow{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 16/3 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\cdot 3} \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 16 \end{array} \right] \xrightarrow{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & -20 \\ 0 & 3 & 16 \end{array} \right] \xrightarrow{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 16/3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Programma van vandaag

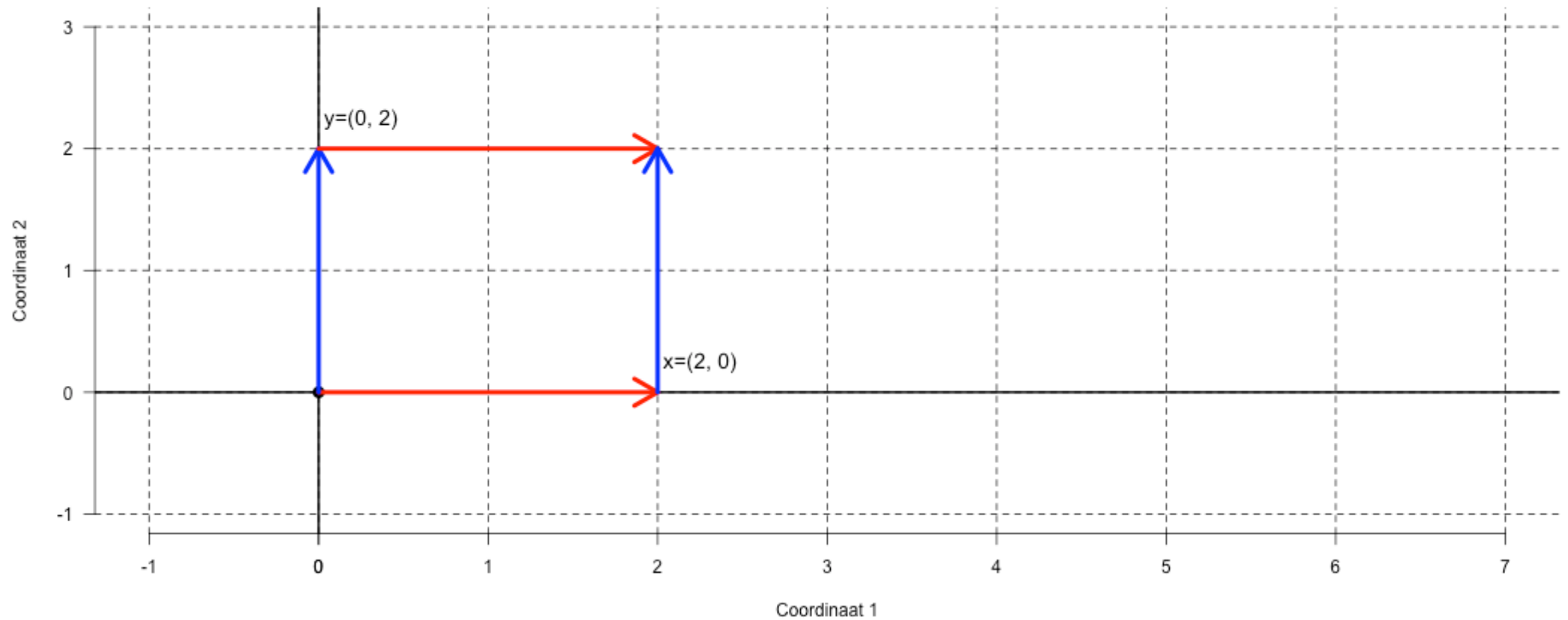
- Motivatie matrices
- Optellen van vectoren
- Functies van vectoren, matrices
- Simultane vergelijkingen en matrices
- **Determinant**
- Eigenwaarden en eigenvectoren

Determinant

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = a \cdot d - b \cdot c$$

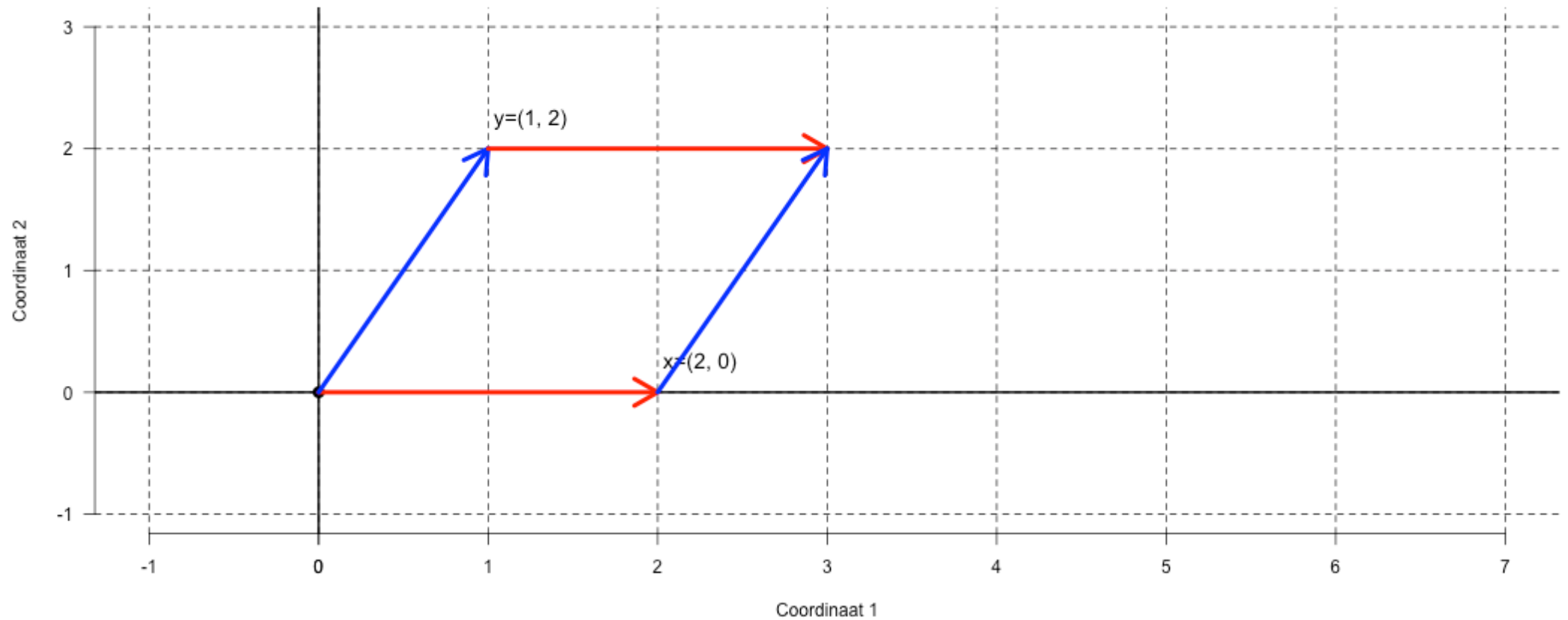
Determinant



Determinant

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

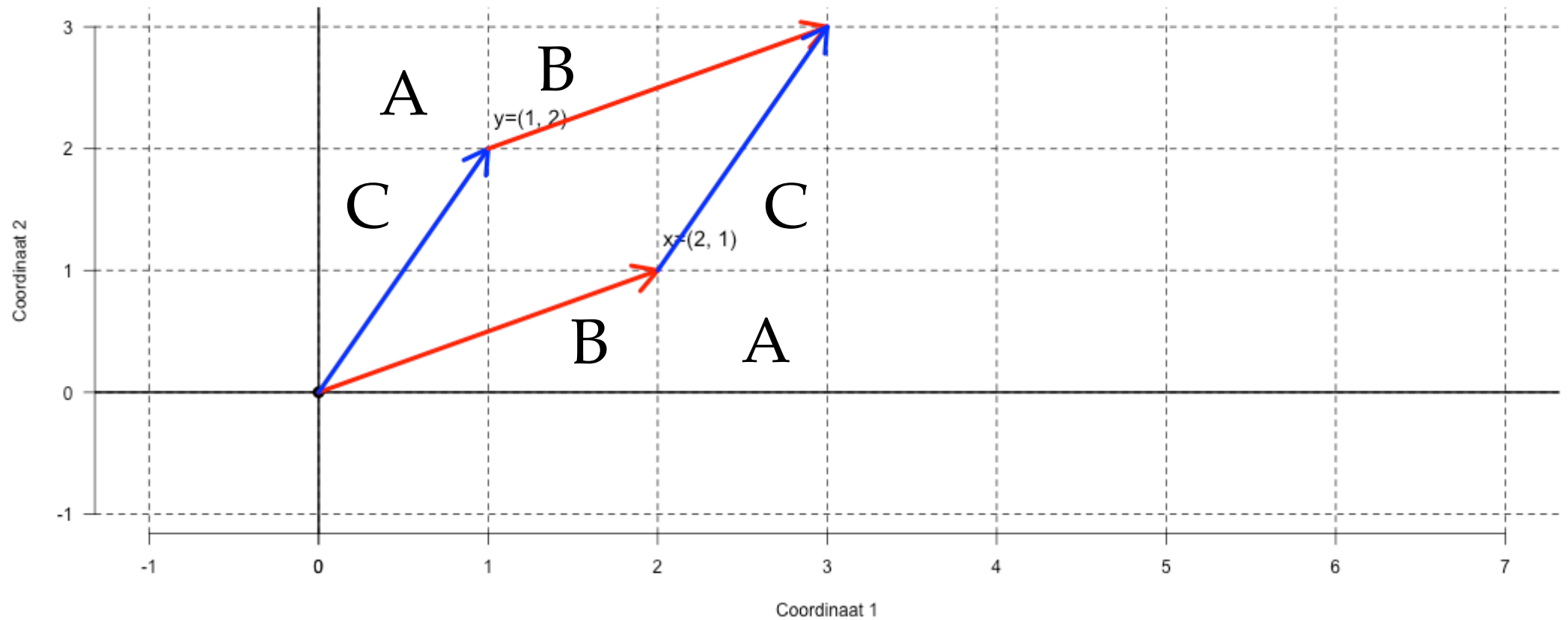
Determinant



Determinant

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinant



Programma van vandaag

- Motivatie matrices
- Optellen van vectoren
- Functies van vectoren, matrices
- Simultane vergelijkingen en matrices
- Determinant
- Eigenwaarden en eigenvectoren

Eigenwaarden

Een vierkante matrix kan worden gekarakteriseerd door haar eigenwaarden en eigenvectoren;

De eigenwaarden vertellen ons wat de matrix doet met vectoren.

Voorbeeld:

$$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Eigenwaarden

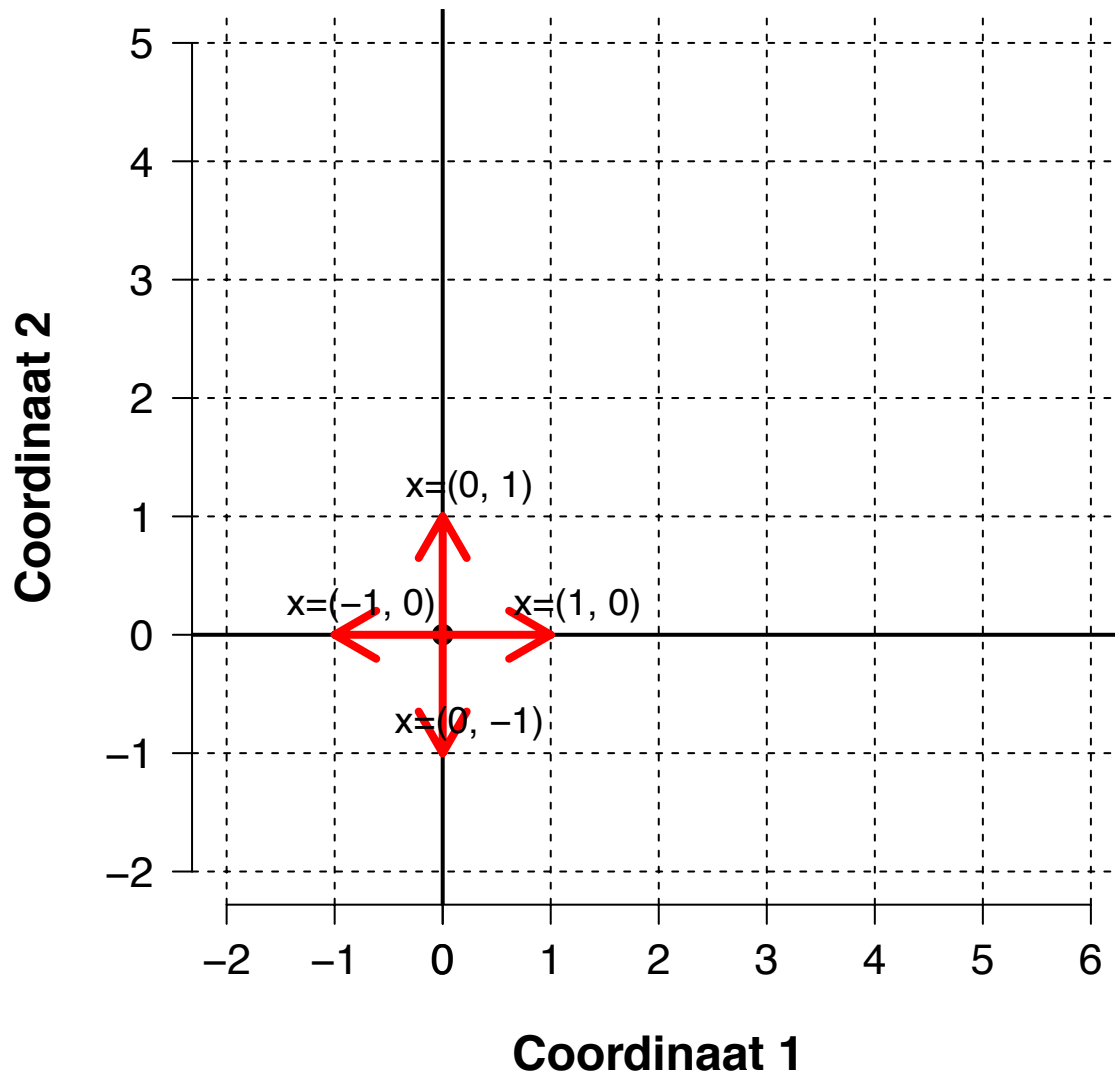
De eigenwaarden vertellen ons wat de matrix doet met vectoren.

Voorbeeld:

$$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

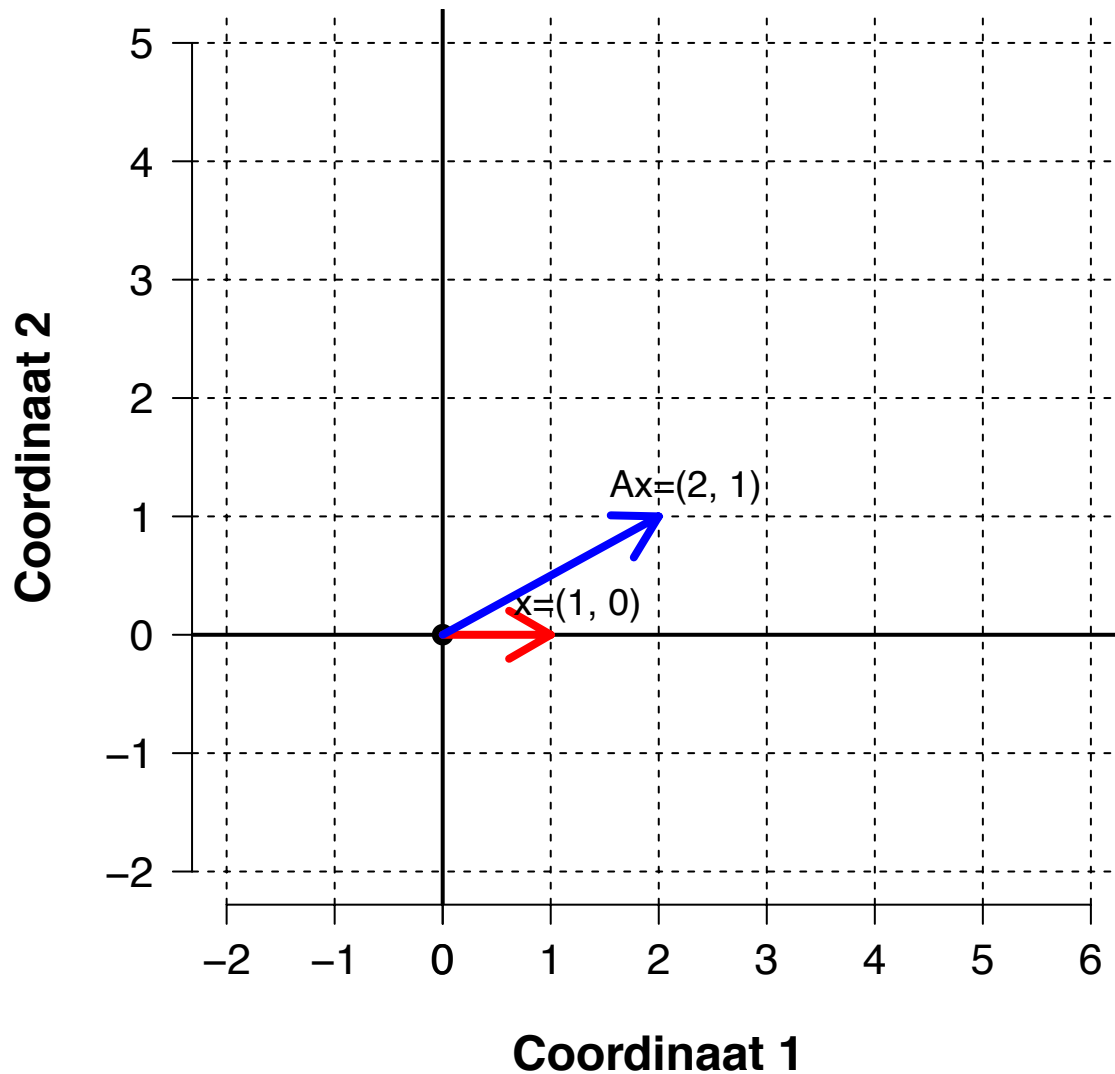
$\mathbb{R}^2$ beschreven dmv de standaard basis



Eigenwaarden

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

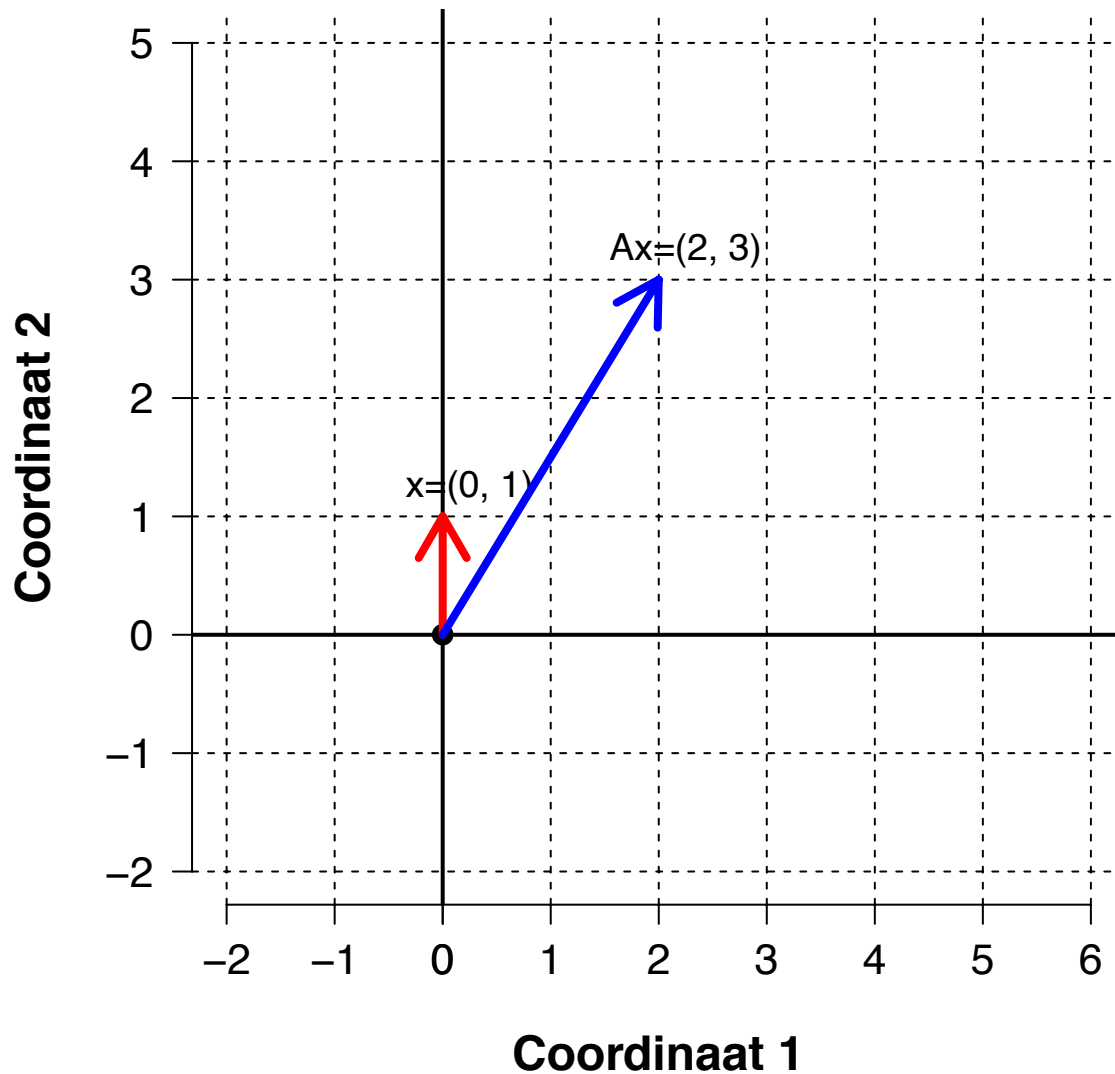
Deze matrix A doet het volgende
met $\underline{x}=(1, 0)'$



Eigenwaarden

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

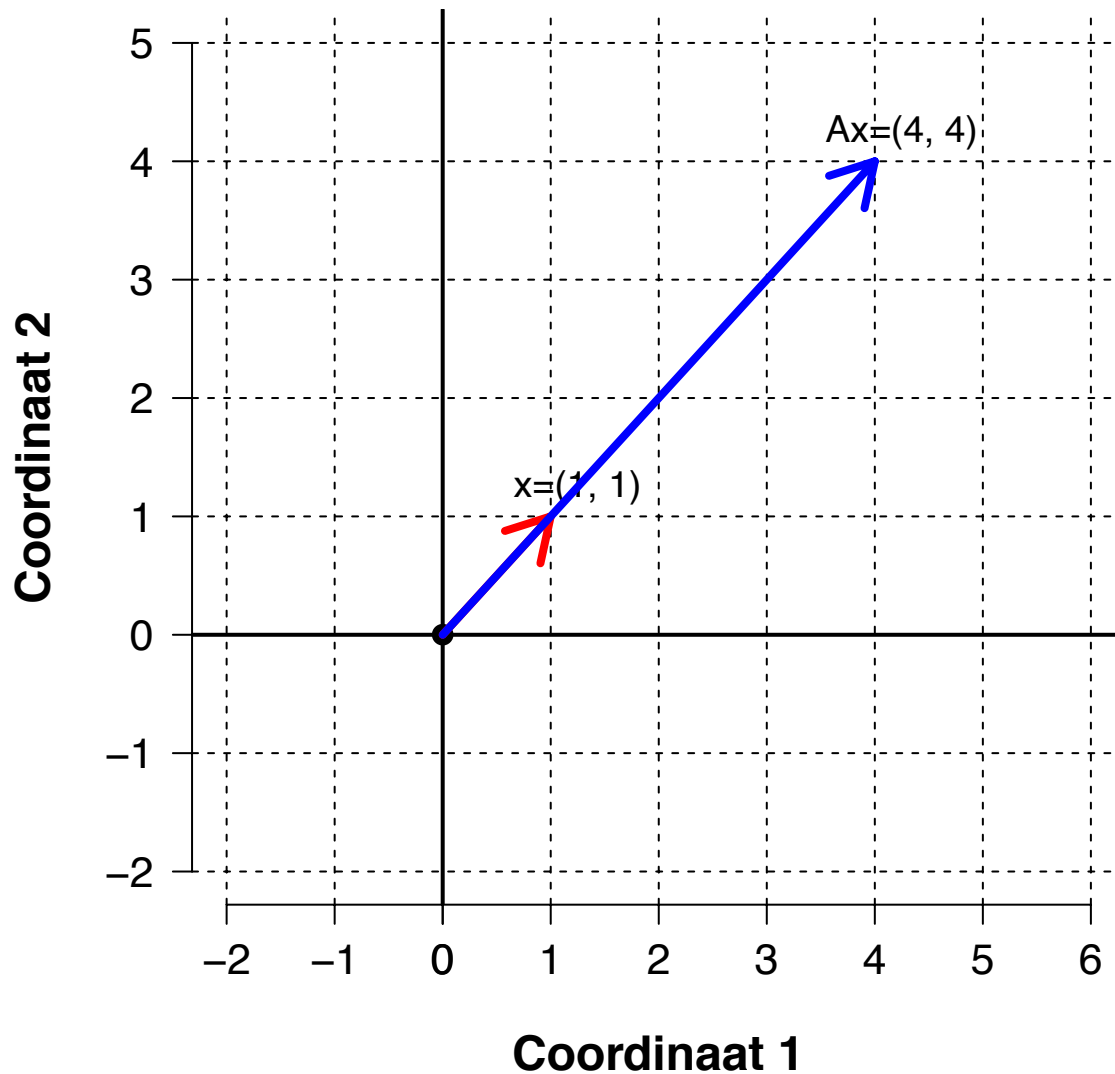
Deze matrix A doet het volgende
met $\underline{x}=(0, 1)'$



Eigenwaarden

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Deze matrix A doet het volgende
met $\underline{x}=(1, 1)'$

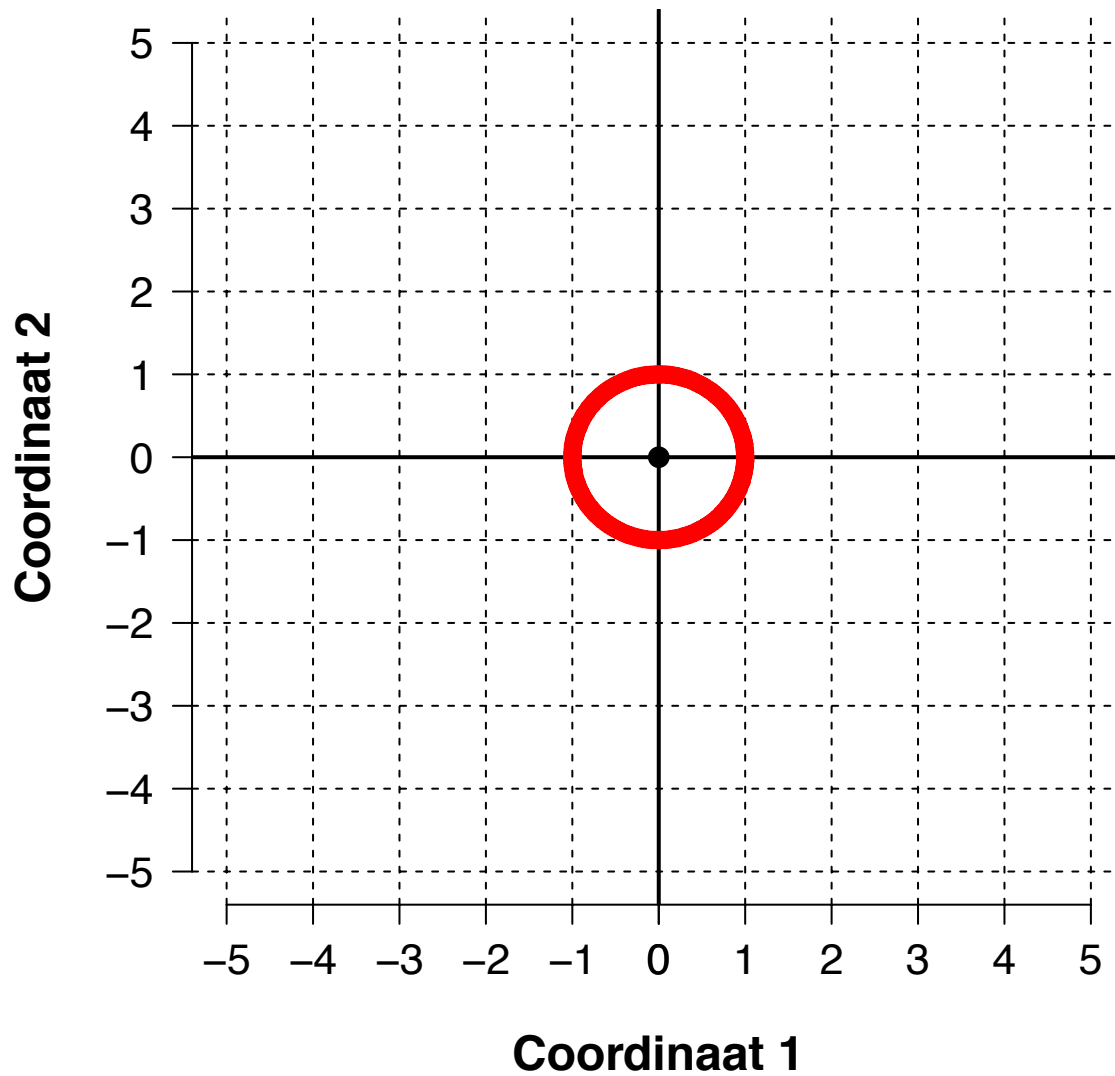


Eigenwaarden

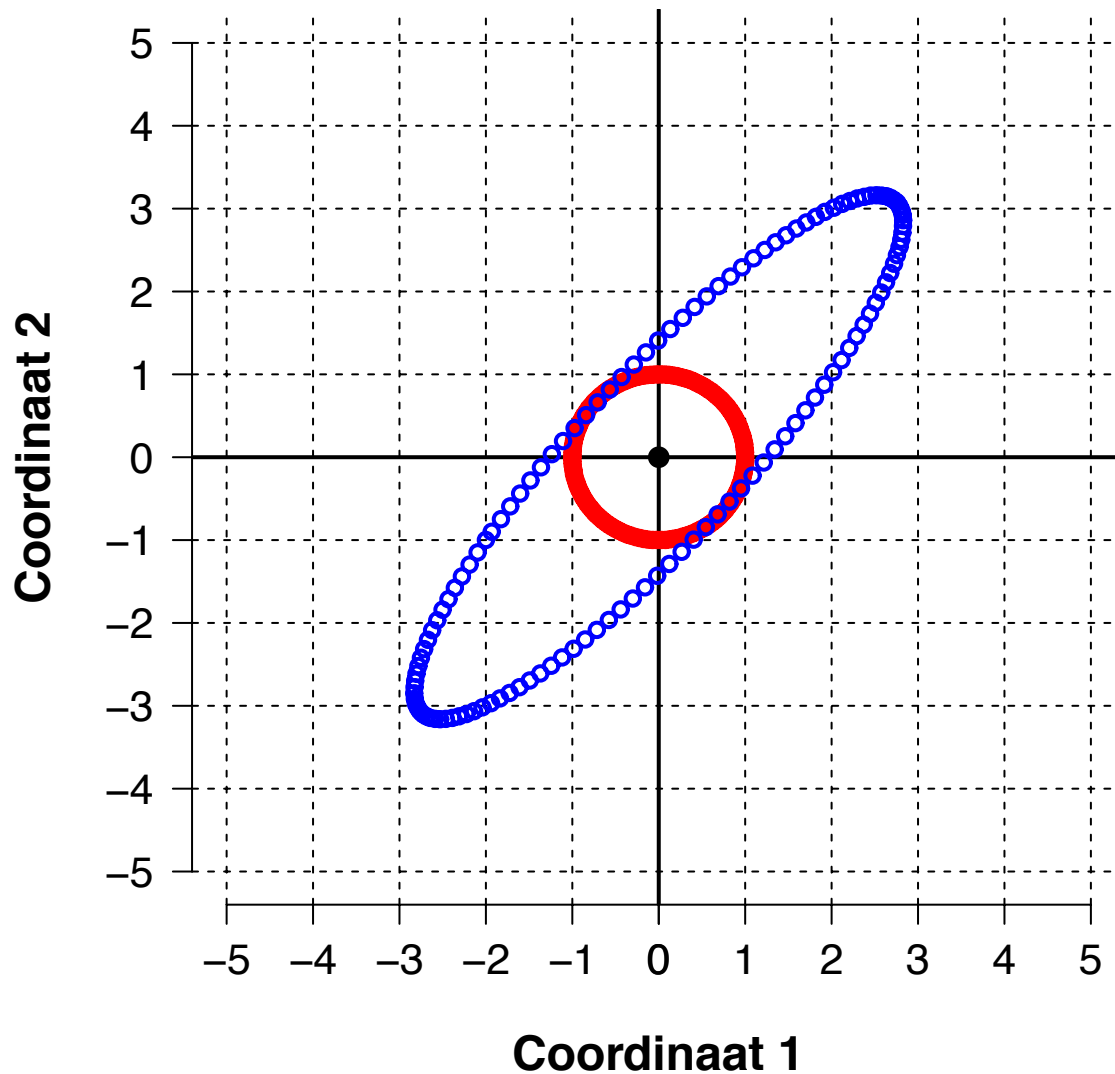
$$\begin{bmatrix} \underline{A} \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Dus in de richting van (1, 1) doet de matrix niks anders dan de vector opblazen met vier.
- Dus $\underline{A} \underline{x} = \lambda \underline{x}$ waarbij λ een expansie factor is, in dit geval 4. Per toeval vonden we dat (1, 1) met vier wordt vermenigvuldigd.

R^2 beschreven dmv pool
coördinaten



Dit is wat A doet met alle
vectoren op de eenheidscirkel



Eigenwaarden

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Om de andere expansie factor λ te vinden moet het volgende gelden: $\underline{A} \underline{x} = \lambda \underline{x}$ oftewel
- $(\underline{A} - \lambda \text{Id}) \underline{x} = 0$

Eigenwaarden

$$\left(\begin{bmatrix} \underline{A} \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \underline{Id} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{x} \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Om de de expansie factoren λ te vinden, lossen we het volgende op: Dus $\underline{A} \underline{x} = \lambda \underline{x}$ oftewel
- $(\underline{A} - \lambda \underline{Id}) \underline{x} = \underline{0}$

Eigenwaarden

$$\begin{bmatrix} \underline{A} - \lambda \underline{Id} \\ 2 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Om de andere expansie λ_2 factor te vinden, lossen we het volgende op: Dus $\underline{A} \underline{x} = \lambda_2 \underline{x}$ oftewel
- $(\underline{A} - \lambda \underline{Id}) \underline{x} = \underline{0}$
- Of simpelweg de determinant van $(\underline{A} - \lambda \underline{Id})$ moet nul zijn.

Eigenwaarden

$$|\underline{A} - \lambda \underline{Id}| = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

- $\det(\underline{A}) = (2-\lambda)(3-\lambda)-2 = 0$
- $\det(\underline{A}) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda-4)(\lambda-1)$
- Dus de matrix A heeft twee eigenwaarden, dus de matrix expandeert met 1 en 4.

Eigenwaarden

$$\begin{bmatrix} \underline{A} - \lambda \underline{Id} \\ 2 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Hoe vinden we de eigenvector behorende bij $\lambda=1$?

Eigenwaarden

$$\begin{bmatrix} \underline{A} - 1\underline{\text{Id}} \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Hoe vinden we de eigenvector behorende bij $\lambda=1$?
- Invullen $\lambda=1$ en vervolgens een (niet-triviale) $\underline{x}$ vinden waarvoor $\underline{A} - 1\underline{\text{Id}} = \underline{0}$
- NB: $\underline{x} = \underline{0}$ werkt altijd en heet daarom de triviale oplossing.

Dit is wat A doet met alle
vectoren op de eenheidscirkel

